Inferencia

Estadística

(Teoría y problemas)

I. Espejo Miranda
F. Fernández Palacín
M. A. López Sánchez
M. Muñoz Márquez
A. M. Rodríguez Chía
A. Sánchez Navas
C. Valero Franco

Edita: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz
c/ Doctor Marañón, 3. 11002 Cádiz (España)
www.uca.es/publicaciones

ISBN: 978-84-9828-131-6

Inferencia Estadística (Revisión: Marzo 2007)
I. Espejo Miranda, F. Fernández Palacín, M. A. López Sánchez, M. Muñoz Márquez, A. M. Rodríguez Chía, A. Sánchez Navas, C. Valero Franco

http://www.uca.es/teloydisren

Capítulo 4

Contraste de hipótesis

1. Conceptos básicos

Este capítulo está dedicado al estudio de los contrastes de hipótesis, sin lugar a dudas, la técnica más utilizada para tratar problemas de Inferencia Estadística. En primer lugar, con el objetivo de conseguir una primera aproximación a la metodología empleada en los contrastes de hipótesis, se propone un ejemplo, en el que de forma natural e intuitiva se van a usar técnicas de resolución de dichos problemas que posteriormente se justificarán desde un punto de vista teórico.

Este capítulo trata los contrastes paramétricos de una y dos muestras, dejando para el tema siguiente los contrastes no paramétricos.

Ejemplo 4.1 *El diámetro de un individuo adulto de una especie de Estrella de Mar en una región surmediterránea está representado por una variable X con distribución $N(\mu, 1'3)$. Por estudios realizados en otras zonas sobre animales de la misma especie se ha estimado un diámetro medio de 7'4 cm. Interesa estudiar si nuestra variable tiene el mismo comportamiento; es decir, si el diámetro 7'4 es válido para la región surmediterránea. Estadísticamente tendríamos que elegir entre:*

$$H_0 : \mu = 7'4 \quad y \quad H_1 : \mu \neq 7'4.$$

H_0 se dice Hipótesis Nula, mientras que H_1 es la Hipótesis Alternativa.

Para decidir entre una u otra se selecciona una muestra de 100 individuos y se analiza si la información que ésta ofrece es compatible con H_0 o no.

Puesto que el parámetro bajo estudio es la media poblacional, μ, es lógico utilizar en el proceso inferencial su estimador ideal, esto es, la media muestral, $\overline{X}$. A partir de dicho estimador se establece un criterio de decisión: a groso modo, si la diferencia entre $\overline{X}$ y $7'4$ es grande habrá que rechazar H_0, actuando en sentido contrario si la diferencia es pequeña. Debido a que la media muestral en poblaciones Normales tiene una distribución $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$, la variable

$$D \quad = \quad \frac{\overline{X} - 7'4}{1'3/\sqrt{100}}$$

sigue una distribución N(0,1), cuando H_0 es cierta.

A partir de esta variable aleatoria se debe precisar también lo que se entiende por diferencias grandes, así como, acotar la probabilidad de cometer errores cuando se realice la toma de decisiones. Todo ello, se irá analizando a lo largo del presente capítulo.

A continuación, se define lo que se entiende por hipótesis estadística y contraste de hipótesis, observando que en la literatura se pueden encontrar sinónimos de este último término tales como *prueba estadística, test de hipótesis o dócima.*

1.1. Las Hipótesis

Una *hipótesis estadística* es una afirmación o conjetura sobre la distribución de una o más variables aleatorias, o bien, sobre alguna característica de las mismas.

La hipótesis que se desea contrastar se denomina *Hipótesis Nula*, mientras que la que se acepta cuando la evidencia muestral está claramente en contra de ésta se denomina *Hipótesis Alternativa.*

Si se quisiera contrastar la hipótesis de que un cierto parámetro θ de una población toma un valor dentro de una región Θ_0 siendo Θ el campo de variación de dicho parámetro, la Hipótesis Alternativa debe contemplar que el parámetro tome valores en una región Θ_1.

Cuando los subconjuntos Θ_0 y Θ_1 se componen de un único elemento las hipótesis correspondientes se denominan *simples* y, en caso contrario, hipótesis *compuestas.*

Se define *contraste de hipótesis* como un procedimiento inferencial consistente en rechazar o no, una hipótesis de tipo estadístico sobre una población, teniendo en cuenta la Hipótesis Alternativa y la evidencia experimental proporcionada por una muestra particular obtenida de dicha población.

En otras palabras, un contraste de hipótesis supone una partición del espacio muestral en dos regiones, región de aceptación y región crítica o de rechazo, de forma que si la muestra considerada se encuentra dentro de la región crítica se rechaza la Hipótesis Nula, mientras que en el caso contrario no se rechaza dicha hipótesis al no existir evidencias para rechazarlas.

Debe tenerse en cuenta que el no rechazo de la Hipótesis Nula no supone ninguna garantía de la certeza de ésta, sino la falta de evidencia en contra de su veracidad. Se podría asimilar la Hipótesis Nula a una persona que está siendo juzgada según el principio de presunción de inocencia, de forma que sólo se rechaza su inocencia, es decir, la Hipótesis Nula, en caso de encontrar pruebas suficientes en contra.

A la vista de la definición, se podría decir que un contraste es una regla de decisión, pero dado que a la hora de adoptar dicha decisión y, como se verá en el desarrollo del capítulo, no se estará a la misma distancia de ambas hipótesis, sino que se dará mucho mayor crédito a la Hipótesis Nula, se trata más bien de una regla de decisión–confirmación. Por ello, teniendo en cuenta el desequilibrio entre las hipótesis, sólo se debería contrastar aquello sobre lo que se tuviera una justificada sospecha de su certeza.

1.2. Clasificación de los contrastes

Dependiendo del grado de conocimiento de la distribución de la población bajo estudio, se distingue entre contrastes paramétricos y no paramétricos. En el caso de que dicha distribución sea conocida salvo parámetros, los tipos de contrastes que se realizan son del tipo paramétrico, siendo su objetivo intentar obtener información sobre los parámetros desconocidos de la distribución de la población bajo estudio. En el caso de que dicha distribución sea desconocida, los contrastes son de tipo no paramétrico, siendo su objetivo intentar determinar alguna característica de la población o de la muestra bajo estudio.

Puesto que los contrastes paramétricos utilizan más información que los no paramétricos, ofrecen mejores resultados. Por ello, siempre que sea posible se debe recurrir a los primeros.

1.2.1. Tipos de contraste sobre parámetros

En primer lugar, se distingue entre contrastes con Hipótesis Nula y Alternativa simples y aquellos que tienen alguna de estas hipótesis compuestas. En segundo lugar, dentro de estos últimos, dependiendo de la estructura de sus hipótesis, se distingue entre los siguientes tipos de contrastes:

1. Contrastes bilaterales: en ellos se propone un valor puntual para el parámetro bajo estudio, de forma que se rechazará bien porque la evidencia muestral lleve a decidir que el valor es mayor que el

propuesto o bien que es menor. Formalmente:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

2. Contrastes unilaterales: en ellos se propone que el valor del parámetro se encuentre bien por debajo o bien por encima de un cierto valor. Las dos situaciones se plantearían de la siguiente forma:

$$\begin{cases} H_0 : \theta \geq \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : \theta \leq \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$$

Se puede observar que en todos los casos el signo igual está incluido en la Hipótesis Nula, el motivo de ello se encuentra en el enfoque que se va a utilizar para realizar el contraste.

2. Los errores de un contraste

A continuación y relacionado con la cuestión anterior, se detallan las consecuencias derivadas de la decisión que se adopte sobre el rechazo o no de la Hipótesis Nula. Antes de ello, véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.2 *Imagínese que se quiere contrastar la hipótesis de que un parámetro de una población toma exactamente el valor 5, sobre lo cual se tienen fundadas sospechas. Para ello, se dispone de una m.a.s. de tamaño 100 extraída de dicha población, de forma que la regla de decisión va a ser: si en la muestra hay al menos 50 valores en el intervalo* $[4'75, 5'25]$ *se admite la Hipótesis Nula y si no es así se rechaza, concluyendo que el valor del parámetro es distinto de 5.*

Tal como está planteado el contraste del ejemplo no viola ninguna de las exigencias requeridas. Sin embargo, presenta ciertas carencias, la principal de ellas es que no se puede dar ninguna medida que garantice la bondad de la decisión adoptada.

2.1. Actuaciones asociadas a un contraste de hipótesis

El cuadro siguiente refleja las repercusiones que se derivan de la decisión que se adopte en la realización de un contraste:

		Decisión estadística	
		No rechazar H_0	Rechazar H_0
Estado Real	H_0 cierta	Correcta	Error tipo I
de la cuestión	H_0 falsa	Error tipo II	Correcta

Trasladando a términos probabilísticos los resultados de las actuaciones se tiene:

$P[\text{Rechazar } H_0/H_0 \text{ cierta}] = \alpha$, se denomina *nivel de significación del contraste.*
$P[\text{No rechazar } H_0/H_0 \text{ cierta}] = 1-\alpha$, denominado *nivel de confianza.*
$P[\text{Rechazar } H_0/H_0 \text{ falsa}] = 1-\beta$, será la *potencia del contraste.*
$P[\text{No rechazar } H_0/H_0 \text{ falsa}] = \beta$, será el *riesgo del contraste.*

Puesto que en la práctica no se sabrá si la decisión adoptada es correcta o no, habrá que elegir contrastes que minimicen las probabilidades de error de tipo I y II. Sin embargo, esto no es posible ya que dichas probabilidades son, en cierto sentido, complementarias, ya que cuando disminuye una aumenta la otra. Por ello, el criterio que se utiliza es el de fijar el nivel de significación, eligiendo de entre todos los test posibles con ese nivel de significación aquel que haga mínimo el riesgo o, lo que es lo mismo, máxima la potencia.

En general, la potencia del test dependerá de la realidad de la situación, que será desconocida, por lo que lo ideal será utilizar, si es que existe, el test denominado *uniformemente más potente*, es decir, aquel que se comporta mejor que el resto en cualquier situación.

Por último, la reducción simultánea de los dos errores, una vez seleccionado el contraste a utilizar, sólo será factible si se dispone de una mayor información, es decir, si se aumenta el tamaño de la muestra.

Ejemplo 4.3 *Sea X una variable con distribución Exponencial* *de parámetro θ. Se desea contrastar*

$$\begin{cases} H_0 : \theta = 1 \\ H_1 : \theta = 2 \end{cases}$$

Para realizar el contraste se toma como región de aceptación para una muestra de tamaño 1 el intervalo $[0, T)$. Los errores α y β vienen dados por:

$$\begin{aligned} \alpha &= P[\text{Rechazar } H_0/H_0 \text{ cierta}] \\ &= P[X \geq T/\theta = 1] \\ &= \int_T^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-T} \end{aligned}$$

y por tanto $T = -\log\alpha$, mientras que

$$\begin{aligned} \beta &= P[\text{No rechazar } H_0/H_0 \text{ falsa}] \\ &= P[0 \leq X \leq T/\theta = 2] \\ &= \int_0^{-\log\alpha} 2e^{-2x} dx \\ &= 1 - e^{2\log\alpha} \end{aligned}$$

con lo que la relación entre las probabilidades queda $\beta = 1 - \alpha^2$, lo que significa que cuando uno crece el otro decrece y viceversa.

Ejemplo 4.4 *Sea X una variable aleatoria que se distribuye según $N(\mu, 1)$. Se desea realizar el contraste*

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu = 3 \end{cases}$$

La regla de decisión que se va a utilizar es la siguiente: si una muestra de tamaño 1 pertenece al intervalo $(-\infty, 2'575)$ no se rechaza H_0, en caso contrario se rechaza. *Se procede a calcular el nivel de significación y la potencia del test.*

$$\begin{aligned} \alpha &= P[\text{Rechazar } H_0/H_0 \text{ cierta}] \\ &= P[X \geq 2'575/\mu = 0] \\ &= P[Z \geq 2'575] = 0'005 \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} 1-\beta &= 1-P[\text{No rechazar } H_0/H_0 \text{ falsa}] \\ &= 1-P[X < 2'575/\mu = 3] \\ &= 1-P[Z < -0'425] = 0'6646. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.5 *Si en el ejemplo anterior se elige como región de aceptación $(-3, 2'69)$, entonces*

$$\begin{aligned} \alpha &= P[(X \leq -3) \cup (X \geq 2'69)/\mu = 0] \\ &= P[Z \leq -3] + P[Z \geq 2'69] \\ &= 0'0014 + 0'0036 = 0'005. \end{aligned}$$

Es decir, el mismo nivel de significación que en el caso anterior, mientras que

$$\begin{aligned} 1-\beta &= 1-P[-3 < X < 2'69/\mu = 3] \\ &= 1-P[-6 < Z < -0'31] = 0'6217. \end{aligned}$$

Por tanto, si se ha de decidir entre los dos contrastes propuestos, puesto que el nivel de significación es el mismo, se elegirá el primero al ser más potente.

3. El enfoque de Neyman–Pearson

El enfoque de Neyman–Pearson proporciona un procedimiento para la obtención de los test más potentes en el caso de que las hipótesis consideradas (Nula y Alternativa) sean simples. Sin embargo, desgraciadamente los resultados que se obtienen no siempre son óptimos, debido a la complejidad de aplicación del método.

3.1. Lema de Neyman–Pearson para hipótesis simples

Sea $\underline{X}$ una m.a.s. extraída de una población cuya distribución depende de un parámetro desconocido, θ. Para realizar el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{cases}$$

se considera la función de verosimilitud de la muestra, $L(\underline{X}, \theta)$, en cada uno de los valores del parámetro que proporciona cada hipótesis, es decir, $L(\underline{X}, \theta_0)$, en la Nula y $L(\underline{X}, \theta_1)$ en la Alternativa. El lema de Neyman–

Pearson dice que la región

$$C = \left\{ \underline{X} \in \Omega \,|\, \frac{L(\underline{X}, \theta_0)}{L(\underline{X}, \theta_1)} \leq K \right\}$$

tal que

$$P[\underline{X} \in C/H_0] = \alpha$$

es de máxima potencia para el contraste anterior, a un nivel de significación α.

Para determinar la constante K y con ella la región crítica, se puede considerar el estadístico $T(\underline{X}, \theta_0, \theta_1)$, de manera que la región crítica C vendría dada por

$$C = \{ \underline{X} \in \Omega \,|\, T(\underline{X}, \theta_0, \theta_1) \leq K_1 \} .$$

Así pues, conociendo α o la potencia del test, se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha = P[\underline{X} \in C/H_0] &= P\left[\frac{L(\underline{X}, \theta_0)}{L(\underline{X}, \theta_1)} \leq K \,/\, H_0 \right] \\ &= P[T(\underline{X}, \theta_0, \theta_1) \leq K_1 \,/\, H_0]. \end{aligned}$$

La determinación de la constante puede hacerse en cualquier momento de la cadena de igualdades, aunque la determinación de la distribución del estadístico T, como ya se comentó al principio, puede ser complicada.

Ejemplo 4.6 *Se considera una m.a.s. de tamaño n extraída de una distribución $N(\mu, 1)$ y se desea realizar el contraste*

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu = 1 \end{array} \right.$$

Para ello se obtiene el cociente de verosimilitudes

$$\begin{aligned} \frac{L(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0)}{L(x_1, x_2, \cdots, x_n, 1)} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{2}} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_n^2}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-1)^2}{2}} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n-1)^2}{2}}} \\ &= \frac{e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}}}{e^{\frac{-\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\sum_{i=1}^n x_i + n}{2}}} \\ &= e^{-\sum_{i=1}^n x_i + \frac{n}{2}} , \end{aligned}$$

de forma que C estará formada por los puntos que verifiquen

$$e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{2}} \quad \leq \quad K,$$

tomando logaritmos

$$-\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{2} \quad \leq \quad \log K,$$

luego

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad \geq \quad -\frac{\log K}{n} + \frac{1}{2} = K_1.$$

Es decir, la región crítica es del tipo $\overline{X} \geq K_1$.

4. Metodología de Fisher para la realización de un contraste paramétrico

El enfoque de Neyman–Pearson se basa en el conocimiento de la distribución del estadístico $T(\underline{X}, \theta_0, \theta_1)$, pero no siempre se puede conocer dicha distribución. Para esos casos donde no es posible aplicar Neyman–Pearson, se plantea una metodología alternativa propuesta por Fisher que parte del conocimiento de la estructura de probabilidad de la población bajo estudio y consta de los siguientes pasos:

1. Definir la Hipótesis Nula a contrastar sobre el parámetro θ objeto de estudio, que puede concretarse en $H_0 : \theta = \theta_0$, lo que determinará la Hipótesis Alternativa, $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

2. Dar una medida, $d(\stackrel{\wedge}{\theta}(\underline{X}), \theta_0)$, de la discrepancia entre la evidencia muestral, $\underline{X}$, representada por el estimador de θ, $\stackrel{\wedge}{\theta}(\underline{X})$ y H_0, de tal forma que d tenga una distribución conocida cuando H_0 sea cierta.

3. Tomar una muestra, obtener la estimación del parámetro, $\stackrel{\wedge}{\theta}(\underline{x})$, y calcular $d_0 = d(\stackrel{\wedge}{\theta}(\underline{x}), \theta_0)$.

4. Si d_0 es muy grande, es decir, si $P[d \geq d_0]$ es muy pequeña, menor que α, se rechaza H_0, mientras que si $P[d \geq d_0] > \alpha$, no se rechaza H_0.

La expresión concreta de d depende del criterio o, como dice Fisher, de la imaginación del investigador. Así, el propio Fisher propone como medidas:

1. $d = \hat{\theta} - \theta_0$
2. $d = |\hat{\theta} - \theta_0|$
3. $d = (\hat{\theta} - \theta_0)^2$
4. $d = \frac{\hat{\theta}-\theta_0}{\sqrt{\sigma^2_{\hat{\theta}}}}$
5. $d = \frac{(\hat{\theta}-\theta_0)^2}{\sigma^2_{\hat{\theta}}} \rightarrow \chi^2_1$, si el estimador utilizado es de máxima verosimilitud.

Al igual que en el enfoque anterior, el nivel de significación es el que determina la región de aceptación y la de rechazo, para lo que se calcula el valor d_c, tal que

$$P[d > d_c/H_0] = \alpha$$

de forma que si $d_0 > d_c$ se rechaza la Hipótesis Nula, no rechazándose en caso contrario.

A la probabilidad

$$p = P[d > d_0/H_0]$$

se le llama *nivel crítico* o *p-valor* (p-value) del contraste. Cuando $p \geq \alpha$ no se rechaza H_0 mientras que cuando $p < \alpha$ se rechaza, además, el nivel crítico proporciona una información adicional de las garantías con las que se rechaza o no la Hipótesis Nula. Así, si p está próximo a α hay que ser más prudente en la decisión que se adopte, pudiendo recurrirse, si fuera posible, a conseguir más información tomando más elementos muestrales o una nueva muestra. En cambio si p es mucho más pequeño o mucho más grande que α, la decisión adoptada estará más respaldada.

Ejemplo 4.7 *Se considera una población $N(\mu, 1)$ de la que se extrae una m.a.s. de tamaño 16 para realizar el contraste*

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 1 \\ H_1 : \mu \neq 1 \end{cases}$$

de forma que $\overline{x} = 1'5$. Se supone $\alpha = 0'05$.

Como medida de la discrepancia se toma:

$$d(\underline{X}) = \left| \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right|$$

es decir, se estiman las diferencias en valor absoluto. Para calcular el punto crítico, puesto que $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ sigue una distribución $N(0,1)$, se tiene que;

$$P[d > d_c] = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad P[-d_c < Z < d_c] = 0'05.$$

Buscando en las tablas resulta que $d_c = 1'96$. Por otra parte, se tiene que

$$d_0 = \left| \frac{1'5-1}{1/\sqrt{16}} \right| = 2$$

por lo que se está dentro de la región crítica. Es decir, hay que admitir que la media de la población es distinta de uno, para un nivel de significación de $0'05$.

El nivel crítico del test es igual a

$$P[|Z| > 2] = 2P[Z > 2] = 0'046.$$

Por tanto, hay que mostrar ciertas reservas en la decisión tomada ya que $0'046$ está muy próximo a $0'05$.

Ejemplo 4.8 *Con los mismos datos del ejemplo anterior, se supone que la desviación típica de la población es desconocida y que* $S_n = 1'2$*, deseándose realizar el contraste*

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq 1 \\ H_1 : \mu > 1. \end{cases}$$

Ahora preocupa el comportamiento en los valores del parámetro a la derecha de uno, donde debe concentrarse la región crítica. Como medida de la discrepancia se toma

$$d(\underline{X}) \quad = \quad \frac{\overline{X}-\mu}{S_n/\sqrt{n-1}}.$$

Al ser $d \sim t_{n-1}$*, el punto crítico viene dado por*

$$P[d > d_c/H_0] = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad P[t_{15} > d_c/H_0] = 0'05,$$

buscando en las tablas se encuentra que

$$d_c = 1'7531.$$

Puesto que

$$d_0 = \frac{1'5 - 1}{1'2/\sqrt{15}} = 1'94$$

debe rechazarse H_0 *y concluir que la media de la población es mayor que uno para un nivel de significación de* $0'05$*.*

El nivel crítico viene dado por

$$P[t_{15} > 1'94] \quad = \quad 0'036.$$

5. Contraste de la razón de verosimilitudes

En el apartado anterior, se habló de una metodología basada en una medida de la discrepancia definida en términos de la diferencia entre el valor asignado al parámetro en la Hipótesis Nula y el que se obtiene a partir de un estimador del mismo. En esta ocasión, se propone un método alternativo donde la medida de la discrepancia se basa en la comparación del máximo de la función de verosimilitud evaluada en la Hipótesis Nula y el máximo absoluto de la misma. Dicha metodología se llama *método de razón de verosimilitudes.*

Dada una población representada por la variable X cuya distribución depende de un parámetro θ, se desea contrastar

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

con $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$.

Para realizar el contraste se toma una m.a.s., $\underline{X}$, y se calcula

$$\lambda(\underline{X}) = \frac{\max\limits_{\theta \in \Theta_0} L(\underline{X}, \theta)}{\max\limits_{\theta \in \Theta} L(\underline{X}, \theta)}.$$

Se puede comprobar que

1. $0 \leq \lambda \leq 1$
2. Si existe el estimador máximo–verosímil, $\overset{\wedge}{\theta}$, entonces

$$\lambda(\underline{X}) = \frac{\max\limits_{\theta \in \Theta_0} L(\underline{X}, \theta)}{L(\underline{X}, \overset{\wedge}{\theta})}$$

Una vez calculado $\lambda(\underline{X})$ el desarrollo del test es muy intuitivo; así, se busca un número $k \in (0, 1)$, tal que si $\lambda(\underline{X}) \leq k$ se rechaza H_0. La desigualdad $\lambda(\underline{X}) \leq k$ determina una región C en el espacio muestral, tal que si $\underline{x} \in C$ se rechaza H_0, no rechazándose en caso contrario. Para calcular el valor de k, fijado un nivel de significación α, se procede como sigue

$$P[\underline{X} \in C / \theta \in \Theta_0] = P[\lambda(\underline{X}) \leq k / \theta \in \Theta_0] \leq \alpha.$$

Sólo se tiene garantizado que el valor de k queda unívocamente determinado cuando la Hipótesis Nula es simple.

Como consecuencias intuitivas del contraste, se tiene que:

1. Si se verifica que $\lambda(\underline{x}) = 1 > k$ entonces no hay evidencias para rechazar H_0.

2. El no rechazar H_0 depende, en primer lugar, de lo próximo que se encuentre Θ_0 del estimador máximo–verosímil, caso de existir, y en segundo lugar, de la curvatura de la función de verosimilitud, de forma que cuando dicha curvatura es muy pequeña resulta más difícil rechazar H_0, haciéndose menor la capacidad de discriminación de $\lambda(\underline{X})$.

En el caso de Hipótesis Nula simple frente a Alternativa simple, el contraste de la razón de verosimilitudes coincide con el de Neyman–Pearson. Además, si existe un estadístico suficiente para el parámetro, el contraste de la razón de verosimilitudes es función de dicho estadístico.

Ejemplo 4.9 *Sea una población $N(\mu, 1)$. Se quiere realizar el contraste*

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu = 1 \\ H_1 : \mu \neq 1 \end{array} \right.$$

a través del método de razón de verosimilitudes. Para ello se toma una muestra de tamaño n y se fija el nivel de significación α.

Puesto que el máximo del parámetro para la función de verosimilitud se alcanza en el estimador máximo–verosímil, $\hat{\mu}_{MV} = \overline{X}$, y la Hipótesis Nula sólo contiene el valor $\mu = 1$ del parámetro, la razón de verosimilitudes viene dada por

$$\lambda(\underline{X}) \;=\; \frac{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-1)^2}{2}}}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}{2}}}$$

por lo que operando se tiene que

$$\lambda(\underline{X}) \;=\; e^{-\frac{n(1-\overline{X})^2}{2}}.$$

La región crítica del contraste viene dada por

$$e^{-\frac{n(1-\overline{X})^2}{2}} \leq k$$

donde el valor de k se obtiene imponiendo que

$$P[\lambda(\underline{X}) \leq k/H_0] = \alpha$$

es decir, tomando logaritmos

$$\begin{aligned} -\tfrac{n}{2}(1-\overline{X})^2 &\leq \log k \\ (1-\overline{X})^2 &\geq \tfrac{2}{n}\log k \\ |1-\overline{X}| &\geq \sqrt{\tfrac{2}{n}\log k} = K. \end{aligned}$$

Puesto que bajo H_0 se verifica que $\overline{X} \sim N(1, \frac{1}{\sqrt{n}})$, se tiene que fijando $\alpha = 0'05$,

$$\begin{aligned} 0'05 &= P[\lambda(\underline{X}) \leq k/H_0] = P[|1-\overline{X}| \geq K/H_0] \\ &= P[\overline{X} \leq 1-K/H_0] + P[\overline{X} \geq 1+K/H_0] \\ &= P[Z \leq -\sqrt{n}K] + P[Z \geq \sqrt{n}K] \end{aligned}$$

y por la simetría de la Normal

$$\begin{aligned} P[Z \leq -\sqrt{n}K\,] &= 0'025 \\ P[Z \geq \sqrt{n}K\,] &= 0'025 \end{aligned}$$

de donde $\sqrt{n}K = 1'96$, suponiendo que $n = 100$, $K = 0'196$, quedando la región crítica como:

$$R_c = \{\underline{X} \in \Omega |\, |\overline{X} - 1| \geq 0'196\}$$

o lo que es lo mismo, la región de aceptación sería

$$R_a : 0'804 < \overline{X} < 1'196.$$

6. Contrastes en poblaciones Normales

El procedimiento que se sigue para realizar los contrastes es el de aplicar si es factible el Lema de Neyman–Pearson. En los casos que ello no sea posible, se aplica el Contraste de la Razón de Verosimilitudes y si tampoco esto fuera posible, se aplica la Metodología de Fisher. No obstante, en poblaciones Normales los contrastes coinciden en la mayoría de los casos, sea cual sea el método que se utilice.

6.1. Contrastes sobre una población

Sea una m.a.s, $\underline{X}$, extraída de una población $N(\mu, \sigma)$. La tabla 4.3 proporciona las regiones críticas en función de las distintas situaciones que se pueden presentar.

6.2. Contrastes sobre dos poblaciones

En primer lugar, habría que distinguir si las muestras son extraídas de poblaciones Normales independientes o por el contrario, se trata de muestras apareadas.

Supóngase $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ y $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ dos m.a.s. extraídas de dos poblaciones independientes, $N(\mu_1, \sigma_1)$ y $N(\mu_2, \sigma_2)$, respectivamente. La tabla 4.4 proporciona las regiones críticas en función de las distintas situaciones que se pueden presentar.

Cuando las dos m.a.s., $X_1, X_2, \cdots, X_n$ e $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$, extraídas de dos poblaciones $N(\mu_1, \sigma_1)$ y $N(\mu_2, \sigma_2)$, respectivamente, son apareadas, se considera la muestra de las diferencias y se aplican los contrastes para una población.

7. Contrastes para la proporción

Para tamaños muestrales grandes se puede aplicar una variante del Teorema de Linderberg–Levy, que garantiza la convergencia de la Binomial a la Normal, obteniéndose los contrastes para la proporción o para la diferencia de proporciones.

7.1. Contrastes sobre una población

Tomando como estimador del parámetro p de la Binomial la proporción muestral $\hat{p}$, basado en una muestra de tamaño n, se obtienen los contrastes de la tabla 4.1.

7.2. Contrastes sobre dos poblaciones

Tomando como estimadores de los parámetros p_1 y p_2 de dos poblaciones Binomiales las respectivas proporciones muestrales, $\hat{p}_1$ y $\hat{p}_2$, basados en muestras de tamaños n_1 y n_2, se obtienen los contrastes de la tabla 4.2.

8. Tablas de contrastes de hipótesis

Hipótesis	Región Crítica
$\begin{cases} H_0: & p = p_0 \\ H_1: & p \neq p_0 \end{cases}$	$\lvert\hat{p} - p_0\rvert \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
$\begin{cases} H_0: & p = p_0 \\ H_1: & p < p_0 \end{cases}$	$\hat{p} - p_0 \leq Z_{\alpha} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
$\begin{cases} H_0: & p = p_0 \\ H_1: & p > p_0 \end{cases}$	$\hat{p} - p_0 \geq Z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

Tabla 4.1: Contrastes sobre la proporción

Hipótesis	Región Crítica
$\begin{cases} H_0: & p_1 = p_2 \\ H_1: & p_1 \neq p_2 \end{cases}$	$\lvert\hat{p}_1 - \hat{p}_2\rvert \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$
$\begin{cases} H_0: & p_1 = p_2 \\ H_1: & p_1 < p_2 \end{cases}$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$
$\begin{cases} H_0: & p_1 = p_2 \\ H_1: & p_1 > p_2 \end{cases}$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$

Tabla 4.2: Contrastes sobre dos proporciones

Hipótesis	Estadístico	Región crítica
Contrastes sobre μ con σ conocida		
$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$	$Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \quad \sim \quad N(0,1)$	$\lvert Z\rvert \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu < \mu_0 \end{cases}$		$Z \leq -Z_{1-\alpha}$
$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu > \mu_0 \end{cases}$		$Z \geq Z_{1-\alpha}$
Contrastes sobre μ con σ desconocida		
$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$	$t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{S_c}\sqrt{n} \quad \sim \quad t_{n-1}$	$\lvert t\rvert \geq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$
$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu < \mu_0 \end{cases}$		$t \leq -t_{n-1,1-\alpha}$
$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu > \mu_0 \end{cases}$		$t \geq t_{n-1,1-\alpha}$
Contrastes sobre σ^2 con μ conocida		
$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$	$\chi^2 = \frac{nS_\mu^2}{\sigma_0^2} \quad \sim \quad \chi_n^2$	$\chi^2 \leq {\chi^2}_{n,\frac{\alpha}{2}} \quad \cup$ $\chi^2 \geq {\chi^2}_{n,1-\frac{\alpha}{2}}$
$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$		$\chi^2 \leq {\chi^2}_{n,\alpha}$
$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$	$S_\mu^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{n}$	$\chi^2 \geq {\chi^2}_{n,1-\alpha}$
Contrastes sobre σ^2 con μ desconocida		
$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$	$\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma_0^2} \quad \sim \quad \chi_{n-1}^2$	$\chi^2 \leq {\chi^2}_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \quad \cup$ $\chi^2 \geq {\chi^2}_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$
$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$		$\chi^2 \leq {\chi^2}_{n-1,\alpha}$
$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$		$\chi^2 \geq {\chi^2}_{n-1,1-\alpha}$

Tabla 4.3: Contrastes sobre una población Normal

Hipótesis	Estadístico	Región crítica
Diferencias de medias con varianzas conocidas		
$\begin{cases} H_0: & \mu_1-\mu_2=\delta_0 \\ H_1: & \mu_1-\mu_2\neq\delta_0 \end{cases}$	$Z=\frac{\bar{x}-\bar{y}-\delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad \sim \quad N(0,1)$	$\|Z\|\geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\begin{cases} H_0: & \mu_1-\mu_2=\delta_0 \\ H_1: & \mu_1-\mu_2<\delta_0 \end{cases}$		$Z\leq -Z_{1-\alpha}$
$\begin{cases} H_0: & \mu_1-\mu_2=\delta_0 \\ H_1: & \mu_1-\mu_2>\delta_0 \end{cases}$		$Z\geq Z_{1-\alpha}$
Diferencias de medias con varianzas desconocidas e iguales		
$\begin{cases} H_0: & \mu_1-\mu_2=\delta_0 \\ H_1: & \mu_1-\mu_2\neq\delta_0 \end{cases}$	$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}-\delta_0}{\sqrt{\frac{n_1S_1^2+n_2S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$	$\|t\|\geq t_{n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2}}$
$\begin{cases} H_0: & \mu_1-\mu_2=\delta_0 \\ H_1: & \mu_1-\mu_2<\delta_0 \end{cases}$		$t\leq -t_{n_1+n_2-2,1-\alpha}$
$\begin{cases} H_0: & \mu_1-\mu_2=\delta_0 \\ H_1: & \mu_1-\mu_2>\delta_0 \end{cases}$	$t \quad \sim \quad t_{n_1+n_2-2}$	$t\geq t_{n_1+n_2-2,1-\alpha}$
Diferencias de medias con varianzas desconocidas y distintas		
$\begin{cases} H_0: & \mu_1-\mu_2=\delta_0 \\ H_1: & \mu_1-\mu_2\neq\delta_0 \end{cases}$	$t=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta_0}{\sqrt{\frac{S_{c_1}^2}{n_1}+\frac{S_{c_2}^2}{n_2}}} \quad \sim \quad t_\nu$	$\|t\|\geq t_{\nu,1-\frac{\alpha}{2}}$
$\begin{cases} H_0: & \mu_1-\mu_2=\delta_0 \\ H_1: & \mu_1-\mu_2<\delta_0 \end{cases}$	$\nu=\frac{\left(\frac{S_{c_1}^2}{n_1}+\frac{S_{c_2}^2}{n_2}\right)^2}{\left(\frac{S_{c_1}^2}{n_1}\right)^2\frac{1}{n_1+1}+\left(\frac{S_{c_2}^2}{n_2}\right)^2\frac{1}{n_2+1}}-2$	$t\leq -t_{\nu,1-\alpha}$
$\begin{cases} H_0: & \mu_1-\mu_2=\delta_0 \\ H_1: & \mu_1-\mu_2>\delta_0 \end{cases}$		$t\geq t_{\nu,1-\alpha}$
Igualdad de varianzas con medias desconocidas		
$\begin{cases} H_0: & \sigma_1^2=\sigma_2^2 \\ H_1: & \sigma_1^2\neq\sigma_2^2 \end{cases}$	$\mathcal{F}=\frac{S_{c_1}^2}{S_{c_2}^2} \quad \sim \quad \mathcal{F}_{n_1-1,n_2-1}$	$\mathcal{F}\leq\mathcal{F}_{n_1-1,n_2-1,\frac{\alpha}{2}} \cup$ $\mathcal{F}\geq\mathcal{F}_{n_1-1,n_2-1,1-\frac{\alpha}{2}}$
$\begin{cases} H_0: & \sigma_1^2=\sigma_2^2 \\ H_1: & \sigma_1^2<\sigma_2^2 \end{cases}$		$\mathcal{F}\leq\mathcal{F}_{n_1-1,n_2-1,\alpha}$
$\begin{cases} H_0: & \sigma_1^2=\sigma_2^2 \\ H_1: & \sigma_1^2>\sigma_2^2 \end{cases}$		$\mathcal{F}\geq\mathcal{F}_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha}$

Tabla 4.4: Contrastes sobre dos poblaciones Normales independientes

9. Ejercicios propuestos

4.1. El dueño de una fábrica sostiene que su producto tiene una vida media de 10 años. Para comprobar tal afirmación se toma una muestra de 120 productos comprobándose que su vida media había sido de $9'6$ años y su desviación típica de $1'2$ años.

a) ¿Qué se puede decir de la afirmación del fabricante, supuesto que sus productos siguen una distribución Normal, con un nivel de confianza del 95 %?

b) ¿Cómo se vería afectada la conclusión anterior si la desviación típica hubiese sido de $1'5$?

4.2. Se sabe que el promedio de las calificaciones de los estudiantes en la asignatura de Estadística en los últimos dos años ha sido de $5'6$. Tras tomar una m.a.s. de 30 estudiantes del presente curso, se obtuvo un promedio de $6'4$ y una desviación típica de $1'25$. Suponiendo que se distribuyen normalmente, ¿se puede afirmar que los alumnos de este año obtuvieron calificaciones por encima de lo habitual?

4.3. Sea X una variable aleatoria distribuida según una $N(\mu, 3)$. A partir de la muestra $6, 7, 8, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 7, 6, 3, 8, 9, 7$, contraste, con un nivel de significación de $0'05$, la hipótesis de que la media real sea 5.

4.4. Durante 100 años la desviación típica de las temperaturas anuales máximas de una ciudad ha sido de 16ºF. Pero en los últimos 12 años se estuvo tomando la temperatura máxima los días uno de cada mes y dio una desviación típica de 10ºF. Supuesto que la temperatura se distribuya normalmente, ¿se puede afirmar con un 95 % de fiabilidad que la variabilidad de las temperaturas ha disminuido?

4.5. El fabricante de un determinado aparato de medida garantiza que éste tiene una desviación típica de $0'25$ unidades. Transcurrido un periodo de 9 meses, una muestra de 20 medidas proporcionó una desviación típica de $0'32$ unidades. ¿Puede afirmarse con un nivel de significación del 5 % que el aparato de medida está estropeado? ¿Y con un 1 % de significación?

4.6. Para averiguar si difieren los niveles de una determinada sustancia química en dos grupos de personas, se toman muestras con los siguientes resultados:

Muestra	n	$\overline{X}$	S
Vitaminas	31	$8'5$	$5'5$
Normal	25	$4'8$	$5'1$

Suponiendo normalidad, contraste tal hipótesis a un nivel de significación de $0'05$.

4.7. Se pretende estudiar si existe diferencia, en lo que a eficacia se refiere, entre el paracetamol y un nuevo producto, Y, en el alivio de determinados síntomas. Para ello, se seleccionó dos grupos de 10 y 16 personas y se midió el tiempo medio que tardaban los enfermos en sentirse bien. Los resultados indicaron que mientras el primer grupo tardaba $15'8$ minutos de media con una desviación típica de $7'8$ minutos, el segundo lo hacía en $13'2$ minutos de media y desviación típica de $6'6$ minutos. Si se supone normalidad en ambos casos, realice el contraste adecuado para un nivel de significación de $0'05$.

4.8. De dos poblaciones Normales se extraen dos muestras aleatorias $\underline{X}$ e $\underline{Y}$, de tamaño 121 y 41 y cuasivarianzas muestrales $70'2$ y $76'8$, respectivamente. Realice un contraste para averiguar si existen evidencias para pensar que las dos muestras procedan de poblaciones con varianza diferente, a un nivel de significación del 10 %.

4.9. Se sabe que ciertas piezas de una máquina tienen una vida media de 1940 horas. Al variar uno de sus componentes se observa que una muestra de 100 piezas ha dado una duración media de 2000 horas y una desviación típica de 150 horas. ¿Se puede afirmar a un nivel de significación del 10 % que el componente modificado ha supuesto un cambio significativo en la duración media de las piezas?

4.10. En una encuesta realizada a 200 habitantes de una población A, 95 personas afirmaban que preferían la playa a la montaña para pasar la vacaciones. La misma encuesta realizada a 150 habitantes de otra población B, dio como resultado que 100 personas preferían ir a la playa. ¿Puede pensarse que los habitantes de la población B son más aficionados a la playa que los de la población A? Contrástese dicha hipótesis al 99 %.

4.11. Con el propósito de saber si debe poner neumáticos diferentes en los trenes delanteros (D) y traseros (T) de sus vehículos, un fabricante ha medido el desgaste producido en 20 de ellos después de 15000 Kms, obteniendo los siguientes resultados:

D	23'4	21'7	18	23'2	16'8	19'1	18'7	19'8	25	21'5
T	22'8	24'9	18	22'7	22'3	18'3	22'1	23'9	17'4	19

a) Suponiendo normalidad, ¿confirman los datos, con un nivel de significación de $0'05$, la hipótesis de que el desgaste medio en el tren delantero es de 21 unidades?

b) ¿Se puede afirmar que los neumáticos sufren el mismo desgaste en los dos trenes?

4.12. El número de defectos congénitos de una población se distribuye según una Poisson de parámetro λ. Se pretende realizar el contraste

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \lambda = 0'3 \\ H_1 : \lambda = 0'2 \end{array} \right.$$

para lo que se toma una muestra aleatoria de 100 individuos de la población. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Defectuosos	0	1	2	3	4	5
Frecuencias	84	9	3	2	1	1

A la vista de tales resultados, ¿qué conclusión puede obtenerse con un nivel de significación del $0'025$?

4.13. Se sabe que el porcentaje de curación espontánea de una determinada enfermedad es del 30 %. Para asegurar la eficacia de un nuevo tratamiento se selecciona aleatoriamente una muestra de 100 enfermos y se les somete a tal tratamiento, obteniéndose que el porcentaje de personas curadas fue del 45 %. ¿Se puede afirmar la eficacia del mencionado tratamiento con una confianza del 95 %?

4.14. En un estudio realizado sobre las tendencias de los fumadores se seleccionó de manera aleatoria una muestra de 400 hombres de los cuales 190 eran fumadores y otra muestra aleatoria de 800 mujeres, de las que fumaban 300. ¿Se puede afirmar que la proporción de fumadores es la misma en hombres que en mujeres con una confianza del 90 %?

4.15. A partir de una m.a.s. de tamaño 36 extraída de una población Normal con desviación típica 5 se desea realizar el siguiente contraste:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 14 \\ H_1 : \mu = 17 \end{cases}$$

Aplicando la regla de decisión,

$$\begin{cases} \text{si} \quad \overline{x} \leq 15 & \text{no se rechaza } \mathrm{H}_0 \\ \text{si} \quad \overline{x} > 15 & \text{se rechaza } \mathrm{H}_0 \end{cases}$$

a) Calcule el nivel de significación, α.
b) Obtenga la probabilidad de cometer un error del tipo II.
c) Calcule la potencia del contraste.

4.16. Una determinada empresa le propone al director de una fábrica un nuevo método que, supuestamente, reduce el tiempo empleado en el montaje de uno de sus productos. Con el propósito de comparar tal método con el empleado habitualmente, seleccionó aleatoriamente a siete de sus empleados para que llevasen a cabo el montaje con los dos sistemas y anotó los tiempos empleados en el montaje, obteniendo los siguientes resultados:

Trabajador	1	2	3	4	5	6	7
Método habitual	38	32	41	35	42	32	45
Método nuevo	30	32	34	37	35	26	38

Supuesto que el tiempo de montaje sigue una distribución Normal, ¿se puede afirmar que efectivamente el nuevo método reduce el tiempo en más de dos minutos?