Estadística Descriptiva y Probabilidad

(Teoría y problemas)

3ª Edición

Autores
I. Espejo Miranda
F. Fernández Palacín
M. A. López Sánchez
M. Muñoz Márquez
A. M. Rodríguez Chía
A. Sánchez Navas
C. Valero Franco

Universidad de Cádiz
Servicio de Publicaciones

Edita: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz
C/ Dr. Marañón, 3
11002 Cádiz

http://www.uca.es/publicaciones

ISBN: 978-84-9828-058-6

Depósito legal:

Estadística Descriptiva y Probabilidad. Teoría y Problemas (Revisión: Febrero 2006)
I. Espejo Miranda, F. Fernández Palacín, M. A. López Sánchez, M. Muñoz Márquez, A. M. Rodríguez Chía, A. Sánchez Navas, C Valero Franco

`http://www.uca.es/teloydisren`

Capítulo 6

Algunos modelos probabilísticos

La identificación del patrón probabilístico por el cual se rige un determinado experimento aleatorio facilita enormemente su estudio. En efecto, cuando se desea estudiar una determinada situación real, el reconocimiento de un modelo probabilístico en dicha situación supone una abstracción matemática que permite el uso tanto de herramientas matemáticas como estadísticas para obtener su completa caracterización.

De esta forma, a lo largo de este capítulo se realizará un estudio pormenorizado de los modelos probabilísticos más importantes, de forma que permitan identificarse cuando se presenten en un determinado experimento aleatorio. Se comienza estudiando modelos discretos y continuos en el caso unidimensional para posteriormente pasar a estudiar algunos modelos en el caso bidimensional.

1. Distribución uniforme discreta

El primer modelo probabilístico que se estudia es el uniforme discreto, que consiste en distribuir a partes iguales la masa de probabilidad entre un número finito de valores.

Sea X una variable aleatoria uniforme discreta, que toma los valores $x_1, \ldots, x_n$. La función de cuantía viene dada por la siguiente expresión

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Suponiendo que $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, su función de distribución viene dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ \frac{1}{n} & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ \frac{2}{n} & \text{si } x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \text{si } x_n \leq x. \end{cases}$$

Por otro lado, se tiene que $E[X] = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ y que, $E[X^2] = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

El ejemplo clásico de una uniforme discreta es el experimento de observar los resultados posibles al lanzar un dado "honesto".

2. Experimento de Bernouilli

La realización de pruebas repetidas e independientes constituyen un experimento de Bernouilli cuando cada una de ellas tiene dos posibles resultados E y F, con probabilidades de ocurrencia, invariantes a lo largo de todo el proceso, p y q, respectivamente. Obviamente se verifica que tanto p como q son estrictamente mayores que cero y además $p + q = 1$. Los dos posibles resultados suelen identificarse a menudo como *éxito* y *fracaso*, y la v.a. que se asocia al experimento toma los valores 1 para el éxito y 0 para el fracaso.

2.1. Distribución binomial

La distribución de probabilidad por la cual se rige el número de éxitos al realizar n pruebas Bernouilli independientes y con probabilidades de éxito iguales, se le denomina distribución binomial.

Ejemplo 6.1 *El número de caras en 15 lanzamientos de una moneda sigue una distribución binomial.*

Se consideran n variables aleatorias Bernouilli independientes, X_i con $i = 1, \ldots, n$, tal que, $X_i = 1$ si en el experimento Bernouilli se ha obtenido éxito y $X_i = 0$ en caso contrario. Obsérvese que si se define $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, se está contando el número de éxitos en n experimentos Bernouilli independientes. Por tanto, una v.a. con distribución binomial puede expresarse como suma de variables aleatorias independientes Bernouilli.

Para calcular la distribución de probabilidad de la variable binomial, se considera la ejecución n veces del experimento Bernouilli en el que han aparecido k éxitos y $n-k$ fracasos, –por ejemplo en la secuencia $EE \ldots EFF \ldots F$–, la probabilidad de este suceso viene dada por $p^k q^{n-k}$. Sin embargo, no es esa la única forma de obtener k éxitos, pues hay que considerar todas las ordenaciones de los elementos E y F, lo que da un total de:

$$P_n^{k,n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

La probabilidad de obtener k éxitos en n pruebas es, por tanto:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Observe que se trata de una verdadera distribución de probabilidad, pues:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1.$$

De hecho, esta expresión justifica el nombre de la distribución, pues lo anterior no es sino el desarrollo del binomio $(p+q)^n$. A la distribución se le suele notar por $B(n, p)$, es decir por su letra o letras iniciales y los parámetros que la caracterizan. De igual forma se procede en el resto de los casos. Es fácil comprobar que:

$$E[X] = np, \quad V[X] = npq, \quad M_X(t) = (pe^t + q)^n.$$

Para el caso particular de que n sea igual a 1 se obtiene la distribución de Bernouilli, $B(p)$.

Propiedad 6.1 *Si $X_1, \ldots, X_k$ son variables aleatorias independientes tal que $X_i \sim B(n_i, p)$ con $i = 1, \ldots, k$, se tiene que $\sum_{i=1}^{k} X_i \sim B(\sum_{i=1}^{k} n_i, p)$.*

Ejemplo 6.2 *De una población de animales, se sabe que el 60 % son machos. Si se extrae un conjunto de 10 animales, ¿cuál es la probabilidad de que en ese conjunto haya 7 hembras?*

Sea X = "Número de hembras en un conjunto de 10 animales", se ve claramente que $X \sim B(10, 0'4)$ (figura 6.1).

La probabilidad de que haya 7 hembras es:

$$P(X = 7) = \binom{10}{7} 0'4^7 0'6^3 = 0'04.$$

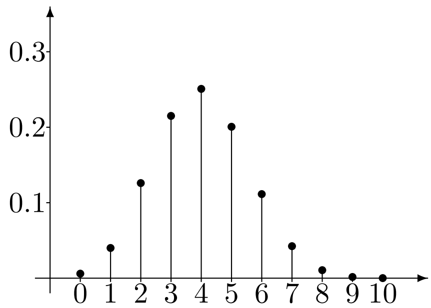

Figura 6.1: Binomial $B(10, 0'4)$

2.2. Distribución geométrica

Una variable aleatoria X definida como el número de fracasos antes de obtener el primer éxito en sucesivas realizaciones de experimentos Bernouilli independientes y con idénticas probabilidades de éxito, se dirá que sigue una distribución geométrica. Dicha variable toma los valores $k = 0, 1, 2, \ldots$, con probabilidad:

$$P(X = k) = pq^k.$$

Sus características son:

$$E[X] = \frac{q}{p} \quad V[X] = \frac{q}{p^2} \quad M_X(t) = \frac{p}{(1-qe^t)}.$$

Propiedad 6.2 *Sea $X \sim Ge(p)$, para cualesquiera n y m se verifica que*

$$P(X > m + n/X > m) = P(X \geq n).$$

Recíprocamente, si X es una variable aleatoria que toma valores no negativos y se cumple que

$$P(X > m + n/X > m) = P(X \geq n)$$

para todo m y n, entonces se tiene que X se distribuye según una distribución geométrica.

Esta propiedad se conoce como de pérdida de memoria*.*

Ejemplo 6.3 *Para la misma población del ejemplo 6.2, se extraen animales hasta obtener la primera hembra, ¿cuál es la probabilidad de extraer 5 machos antes que la primera hembra?*

Si se considera como éxito extraer una hembra y se define la variable X como: "Número de machos antes de obtener la primera hembra", se tiene una distribución geométrica, es decir, $X \sim Ge(0'4)$.

La probabilidad que se pide es:

$$P(X = 5) = 0'6^5 \cdot 0'4 = 0'36.$$

2.3. Distribución binomial negativa

Una v.a. X definida como el número de fracasos antes del r-ésimo éxito en sucesivas realizaciones de un experimento Bernouilli independientes con igual probabilidad, se dirá que sigue una distribución binomial negativa. La distribución geométrica es un caso particular de binomial negativa cuando $r = 1$. La v.a. X toma los valores $k = 0, 1, 2, \ldots$, con probabilidad:

$$P(X = k) = \binom{k + r - 1}{k} p^r q^k.$$

Sus principales rasgos son:

$$E[X] = \frac{rq}{p}, \quad V[X] = \frac{rq}{p^2}.$$

Propiedad 6.3 *Sean $X_1, \ldots, X_r$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una distribución geométrica de parámetro p. Se tiene que $\sum_{i=1}^{r} X_i$ sigue una distribución binomial negativa de parámetros r y p.*

Propiedad 6.4 *Sean $X_1, \ldots, X_k$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una binomial negativa de parámetros r_i y p con $i = 1, \ldots, k$. Se tiene que $\sum_{i=1}^{k} X_i$ sigue una distribución binomial negativa de parámetros r y p, siendo $r = \sum_{i=1}^{k} r_i$.*

Ejemplo 6.4 *Siguiendo con la población del ejemplo 6.2, ¿cuál es la probabilidad de extraer 5 hembras antes del tercer macho?*

En este caso, el éxito se define como "extraer un macho", por lo que $p = P(\text{éxito}) = 0'6$ y $X =$"Número de hembras antes de obtener el tercer macho". Entonces $X \sim BN(3, 0'6)$.

La probabilidad pedida es:

$$P(X = 5) = \binom{5 + 3 - 1}{5} 0'6^3 \cdot 0'4^5 = 0'18.$$

3. Distribución hipergeométrica

Dada una urna compuesta por N_1 bolas blancas y N_2 negras, de la que se extraen n bolas sin reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de que haya r bolas blancas y $n-r$ bolas negras entre las n bolas extraídas?

Utilizando números combinatorios, esta probabilidad vale:

$$\frac{\binom{N_1}{r}\binom{N_2}{n-r}}{\binom{N_1+N_2}{n}}.$$

En esta situación, la distribución de la v.a. definida como número de bolas blancas (r) en una extracción de n bolas de una urna se le denomina distribución hipergeométrica. Dicha variable toma los valores $r = 0, 1, \ldots, \text{mín}\{n, N_1\}$ con probabilidad:

$$P(X = r) = \frac{\binom{N_1}{r}\binom{N_2}{n-r}}{\binom{N_1+N_2}{n}}.$$

Sus principales características son:

$$E[X] = \frac{nN_1}{N_1 + N_2}, \quad V[X] = n\left(\frac{N_1 + N_2 - n}{N_1 + N_2 - 1}\right)\frac{N_1N_2}{(N_1 + N_2)^2}.$$

Se hace notar que la diferencia que existe entre un experimento con distribución binomial y uno con distribución hipergeométrica radica, en que en la primera, la extracción de las bolas se producen con reemplazamiento y en la segunda, sin reemplazamiento. Por ello, cuando N_1 y N_2 tiende a infinito y $\frac{N_1}{N_1+N_2}$ converge a un valor p, la distribución hipergeométrica se aproxima a una distribución binomial $B(n, p)$, con $p = \frac{N_1}{N_1+N_2}$; ya que en este caso la probabilidad de extraer una bola con o sin reemplazamiento es prácticamente la misma.

Ejemplo 6.5 *De una urna que contiene seis bolas negras y nueve bolas rojas se extraen cinco bolas, ¿cuál es la probabilidad de obtener tres bolas rojas?*

Sea X = "Número de bolas rojas al extraer cinco *bolas de la urna". La probabilidad pedida es:*

$$P(X=3)=\frac{\binom{6}{2}\binom{9}{3}}{\binom{15}{5}}=0'4196.$$

Ejemplo 6.6 *Si el experimento del ejemplo anterior se repite tres veces, reintegrando las bolas extraídas y añadiendo el mismo número de bolas negras y rojas obtenidas, ¿cuál es la probabilidad de obtener una secuencia de una, dos y tres bolas rojas?*

Sea X_i = "Número de bolas rojas extraídas en la extracción i-ésima". La probabilidad pedida es:

$$P(X_1=1)\cdot P(X_2=2/X_1=1)\cdot$$
$$P(X_3=3/(X_1=1,X_2=2))=$$

$$=\frac{\binom{6}{4}\binom{9}{1}}{\binom{15}{5}}\cdot\frac{\binom{10}{3}\binom{10}{2}}{\binom{20}{5}}\cdot\frac{\binom{13}{2}\binom{12}{3}}{\binom{25}{5}}=0'0051.$$

4. Proceso de Poisson

Se considera una determinada eventualidad que se produce en un **soporte continuo** (tiempo, línea, área, espacio,...), de forma **independiente** y con una cierta **estabilidad** para una unidad de soporte prefijada. Como ejemplos se pueden considerar el número de coches que pasan por un semáforo en un periodo de tiempo, el número de defectos por metro cuadrado de una pieza de tela, el número de hormigas de una cierta especie en un metro cúbico de tierra, etc. Las tres condiciones en negrita caracterizan al denominado proceso de Poisson, y su v.a. está definida por el número de eventos que se producen en una región de tamaño fijo.

4.1. Distribución de Poisson

La distribución de Poisson se obtiene como límite de la binomial cuando el número de veces que se realiza el experimento, n, tiende a infinito, la probabilidad de éxito, p, tiende a cero y el número medio de éxitos, np, se estabiliza alrededor de un número, λ, que será la media y el valor que caracterizará a la distribución. Calculando dicho límite se obtiene:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

La distribución, que se denota $P(\lambda)$, aparece, históricamente, al considerar el número de llamadas telefónicas realizadas por unidad de tiempo a un mismo teléfono, siendo λ el número medio de llamadas. Además, se puede observar que en la distribución Poisson la mayor parte de la masa de probabilidad queda repartida entre un número relativamente pequeño de valores, siendo posible que tome otros valores pero con una probabilidad bastante pequeña. Por ello, a la distribución Poisson se le llama distribución de los sucesos raros.

Sus principales características son:

$$E[X] = \lambda, \qquad V[X] = \lambda, \qquad M_X(t) = e^{-\lambda(1-e^t)}.$$

Todo lo anterior está referido a una unidad de soporte de tamaño 1, si se quiere generalizar a cualquier región de tamaño t la función de cuantía es:

$$P_t(X = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Ejemplo 6.7 *El número medio de vehículos por minuto que llegan a una gasolinera es igual a 2. ¿Cuál es la probabilidad de que en un minuto lleguen 5 vehículos?, ¿y la de que en 5 minutos no llegue ninguno?*

Se trata de una distribución de Poisson, para la que se conoce el número medio, que es igual al parámetro λ, por lo tanto $X \sim P(2)$ (figura 6.2). La primera probabilidad pedida es:

$$P(X = 5) = \frac{2^5}{5!} e^{-2} = 0'036.$$

Para calcular la otra probabilidad, hay que hacer un cambio de parámetro pues la longitud del intervalo cambia.

Si en un minuto el número medio de vehículos es 2, en cinco minutos será 10. Por lo tanto se tiene $Y \sim P(10)$.

$$P(Y = 0) = \frac{10^0}{0!} e^{-10} = 0'000045.$$

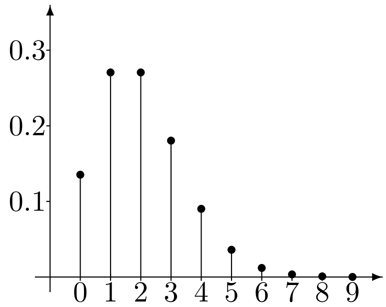

Figura 6.2: Poisson $P(2)$

4.2. Distribución exponencial

A partir de un proceso de Poisson, la distribución de una v.a. X definida como el tiempo transcurrido entre la ocurrencia de dos eventos consecutivos, se denomina exponencial y se denota por $Exp(\lambda)$. Observe que se ha dado un salto cualitativo, puesto que la variable definida es continua, tomando valores en el intervalo $[0, +\infty)$. Se verifica que:

$$P(X > t) = P(\text{cero eventos en } (0, t)) = e^{-\lambda t}.$$

y por tanto:

$$F(t) = P(X \le t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

derivando se obtiene la función de densidad de X (figura 6.3):

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Los parámetros de la distribución son:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad V[X] = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \gamma_1 = 2, \quad \gamma_2 = 9.$$

Ejemplo 6.8 *Con los datos del ejemplo 6.7 y suponiendo que acaba de llegar un vehículo, calcule la probabilidad de que transcurran más de 5 minutos hasta que aparezca el siguiente.*

El tiempo que transcurre desde que pasa un vehículo hasta el siguiente sigue una distribución exponencial de parámetro igual a 2. La probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X \leq 5) = 1 - (1 - e^{-2\cdot 5}) \\ &= 0'000045. \end{aligned}$$

Observe que se llega al mismo resultado utilizando la distribución de Poisson que la exponencial, considerando que el suceso "transcurren más de 5 minutos en pasar algún vehículo" para la exponencial es el suceso "no pasa ningún vehículo en cinco minutos" para la Poisson.

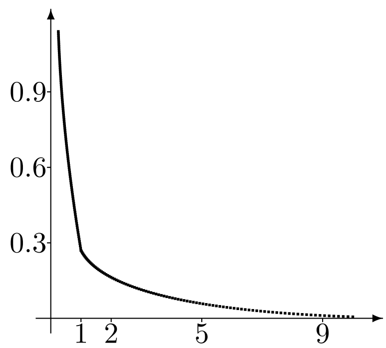

Figura 6.3: Distribución exponencial

5. Distribución uniforme continua

A continuación se estudia la distribución uniforme continua como la extensión natural de la distribución uniforme discreta, es decir, aquella que toma con igual probabilidad valores dentro de dos conjuntos cualesquiera de igual amplitud e incluidos en el intervalo de valores posibles de la variable.

La variable X sigue una distribución uniforme o rectangular en el intervalo (a, b), $U(a, b)$, cuando su función de densidad viene dada de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \le x \le b \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Su representación gráfica justifica el nombre de rectangular (figura 6.4).

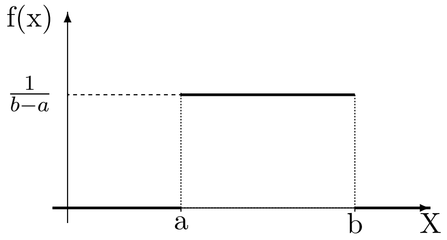

Figura 6.4: Distribución uniforme.

Sus características más importantes son:

$$E[X] = \frac{a+b}{2}, \quad V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}.$$

Ejemplo 6.9 *Un autobús pasa por cierta parada cada 15 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que un señor que llega en un momento dado tenga que esperar el autobús más de cinco minutos?*

Si se define X = "Tiempo de espera", entonces $X \sim U(0, 15)$. Se calculará en primer lugar la función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{x}{15} & \text{si} \quad 0 \le x \le 15 \\ 1 & \text{si} \quad x > 15. \end{cases}$$

La probabilidad pedida viene dada por:

$$P(X > 5) = 1 - P(X \le 5) = 1 - \frac{5}{15} = 0'67.$$

6. Distribución normal

En este epígrafe se estudia la distribución más importante del cálculo de probabilidades y de la estadística, usualmente también denominada distribución de Gauss o de Laplace. La importancia de esta distribución radica en varias razones: en primer lugar, como se verá posteriormente a través del teorema central del límite, la distribución normal es la distribución límite de una amplia gama de sucesiones de variables aleatorias independientes. En segundo lugar, la gran mayoría de las variables aleatorias que se estudian en experimentos físicos son aproximadas por una distribución normal. En tercer lugar, se ha observado que los errores aleatorios en los resultados de medida se distribuyen, de forma general, según una distribución normal. Finalmente, hay que destacar el carácter reproductivo de sus parámetros que facilita el manejo de este tipo de distribuciones.

Se dice que una variable X sigue una distribución normal si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty \leq x \leq +\infty.$$

La distribución está caracterizada por los parámetros μ y σ, cuyo significado se trata más adelante, siendo σ necesariamente positivo. Se hace referencia a esta distribución como $N(\mu, \sigma)$. Su representación gráfica viene dada por la figura 6.5.

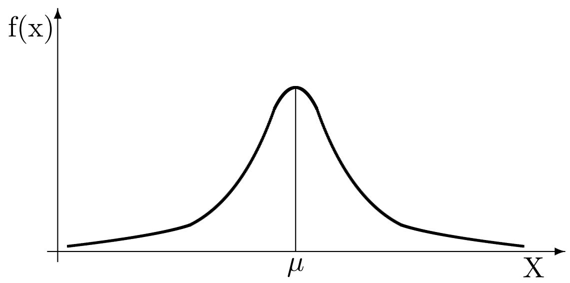

Figura 6.5: Distribución $N(\mu, \sigma)$

Propiedad 6.5 *Sean $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$ con $i = 1, \ldots, n$ variables aleatorias independientes entonces* $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}\right)$.

6.1. Distribución $N(0,1)$

Para facilitar cálculos, se realiza el estudio de la distribución $N(0,1)$ y mediante un cambio de variable se generalizará para la $N(\mu, \sigma)$. La función de densidad de la $N(0,1)$ es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad -\infty \leq x \leq +\infty.$$

A continuación se realiza el estudio de dicha función.

1. Campo de existencia. Toda la recta real para x, con $f(x) > 0$.
2. Simetrías. Es simétrica respecto al eje OY, ya que $f(x) = f(-x)$.
3. Asíntotas. $y = 0$ es una asíntota horizontal.
4. Cortes con los ejes. Sólo tiene un punto de corte en $(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$.
5. Máximos y mínimos. El punto de corte anterior es el único máximo de la distribución.
6. Puntos de inflexión. Tiene dos en $(-1, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}})$ y $(1, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}})$.

Con todo lo anterior la curva tiene la forma de la figura 6.6.

Las características de la distribución son:

$$E[X] = 0, \quad V[X] = 1, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 3.$$

Los valores de la distribución $N(0,1)$ están tabulados y son fácilmente calculables.

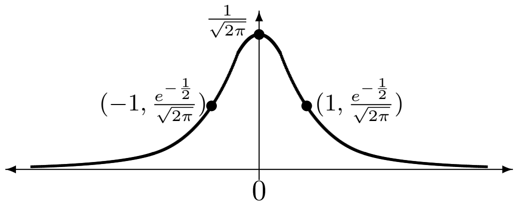

Figura 6.6: Distribución $N(0,1)$

A partir de ahora, si una variable sigue una distribución $N(0,1)$ se denotará por la letra Z. Así, si X sigue una $N(\mu, \sigma)$ se verifica que:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{y} \quad X = \sigma Z + \mu.$$

Con lo que se puede comprobar fácilmente que:

$$E[X] = \mu, \quad V[X] = \sigma^2.$$

Ejemplo 6.10 *El contenido de un tipo de bombonas de gas se distribuye normalmente con media 23 kg y desviación típica 0'25 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que una bombona tenga más de 23'5 Kg?*

La probabilidad pedida es:

$$P(X > 23'5) = 1 - P(X \leq 23'5).$$

Para calcular esta probabilidad hay que tipificar la variable y hacer uso de la tabla $N(0,1)$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 23'5) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{23'5-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{23'5-23}{0'25}\right) \\ &= P(Z \leq 2) = 0'977. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$P(X > 23'5) = 1 - 0'977 = 0'023.$$

6.2. Distribuciones truncadas

A veces la variable no toma todos los valores de la recta real, imagine que sólo puede tomar valores positivos. Se supone que X no está definida fuera del intervalo $[a, b]$, entonces la función de densidad de la variable truncada en dicho intervalo que se puede denominar $f_{[a,b]}$ viene dada, en función de una variable general, por:

$$f_{[a,b]}(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{F(b) - F(a)} & \text{si} \quad x \in [a, b] \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [a, b]. \end{cases}$$

La caracterización anterior vale para cualquier tipo de distribución.

7. Relación entre binomial, Poisson y normal

A veces el cálculo para obtener la probabilidad de una variable binomial es muy dificultoso, esto suele ocurrir cuando n es muy grande. En tales casos, y bajo ciertas condiciones, es posible aproximar la distribución binomial por la normal o la Poisson, esta última también es susceptible de ser aproximada por la normal. Las siguientes propiedades resumen las relaciones existentes entre tales distribuciones.

Propiedad 6.6 *Si la probabilidad p de éxito de una variable $B(n, p)$ tiende a cero, mientras que el número de pruebas tiende a infinito, de forma que $\mu = np$ permanece constante, la distribución binomial se puede aproximar por una distribución de Poisson con media μ. En la práctica es suficiente con que n sea mayor que 100 y p menor o igual a 0'05.*

Propiedad 6.7 *Si X sigue una $B(n, p)$, siendo n grande y p no demasiado pequeño, entonces $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{npq}}$ se aproxima a una distribución $N(0, 1)$ a medida que n tiende a infinito. La aproximación es bastante buena siempre que:*

$$np > 5 \quad si \quad p \leq 0'5 \qquad ó \qquad nq > 5 \quad si \quad p > 0'5$$

Hay ocasiones en que es más conveniente operar con la proporción de éxitos obtenidos en n pruebas Bernouilli que con el número de éxitos. Puesto que se verifica:

$$\frac{X - np}{\sqrt{npq}} = \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}.$$

Podemos afirmar lo siguiente:

Propiedad 6.8 *En las condiciones de la propiedad anterior*

$$\frac{X}{n} \sim N\left(p; \sqrt{\frac{pq}{n}}\right).$$

Propiedad 6.9 *Si X sigue una distribución de Poisson de parámetro λ suficientemente grande, entonces es posible aproximarla por una distribución $N(\lambda, \lambda^{1/2})$. En la práctica se exige a λ que sea mayor que 5.*

El gráfico de la figura 6.7 resume los resultados anteriores.

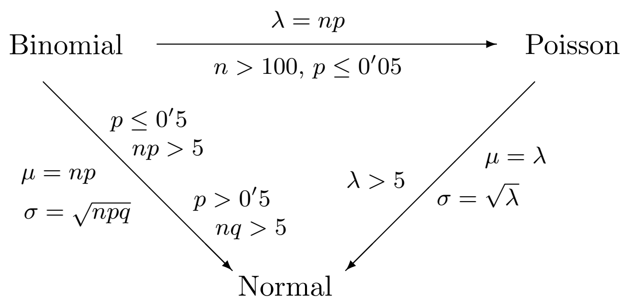

Figura 6.7: Relación entre binomial, Poisson y normal.

8. Teorema central del límite

Las aproximaciones que se han expuesto son casos particulares del denominado *teorema central del límite*. Este teorema dice que si

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes con medias μ_i, desviaciones típicas σ_i y distribuciones cualesquiera, no necesariamente la misma para todas las variables, entonces si se define $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$, cuando n tiende a infinito, la distribución de la variable:

$$\frac{Y - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {\sigma_i}^2}}$$

tiende a una distribución $N(0, 1)$.

9. Distribución gamma

Para $p > 0$ se define la función $\Gamma(p)$ como

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \,\mathrm{d}\, x.$$

Esta función verifica las siguientes propiedades:

- $\Gamma(1) = 1$.
- $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$ con $p > 1$.
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Se dice que una variable aleatoria, X, tiene una distribución gamma de parámetros a y p, tal que, $a > 0$ y $p > 0$, $X \sim \Gamma(a; p)$, si tiene como función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a^p}{\Gamma(p)} e^{-ax} x^{p-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Se verifica que $M_X(t) = \left(1 - \dfrac{t}{a}\right)^{-p}$, de donde se deduce que, $E[X] = \frac{p}{a}$ y que $E[X^2] = \dfrac{p(p+1)}{a^2}$, por tanto, $V[X] = \dfrac{p}{a^2}$.

Destaca como caso particular de este tipo de distribución la $\Gamma(\lambda, 1)$ que es la distribución $Exp(\lambda)$. La distribución $\Gamma(\lambda, n)$ se utiliza para calcular la distribución del tiempo transcurrido entre las ocurrencias k y $k+n$ de un proceso de Poisson de media λ.

Propiedad 6.10 *Sean $X_1, \ldots, X_n$ un conjunto de variables aleatorias independientes, tal que, $X_i \sim \Gamma(a, p_i)$ con $i = 1, \ldots, n$, se tiene que $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(a, \sum_{i=1}^{n} p_i)$.*

Propiedad 6.11 *Sean $X_1, \ldots, X_n$ un conjunto de variables aleatorias independientes, tal que, $X_i \sim Exp(\lambda)$ con $i = 1, \ldots, n$, se tiene que $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(\lambda, n)$.*

Propiedad 6.12 *Sea $X \sim \Gamma(a, p)$ entonces $cX \sim \Gamma\left(\frac{a}{c}, p\right)$.*

Ejemplo 6.11 *Sea $X \sim \Gamma(2, 2)$, el calculo de la función de distribución y $P(X \geq 5)$ se hace:*

$$\begin{aligned} F(x) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(2)}\, 2^2 e^{-2x} x \,\mathrm{d}\, x &= -2xe^{-2x}\Big|_0^x + 2\int_0^x e^{-2x}\,\mathrm{d}\, x \\ &= 1-(1+2x)e^{-2x}. \end{aligned}$$

Con lo cual, $F(5) = 1 - 11e^{-20}$.

10. Distribución beta

Para $a > 0$ y $b > 0$ se define la función beta, como;

$$\beta(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}\, x,$$

y se verifica la siguiente relación $\beta(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Se dice que una variable aleatoria, X, sigue una distribución beta de parámetros $a > 0$ y $b > 0$, y se denota por $X \sim \beta(a,b)$, si su función de densidad viene dada por la expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\beta(a,b)} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Se tiene que la función generatriz de momentos es

$$M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{\Gamma(j+1)} \frac{\Gamma(a+j)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+j)\Gamma(a)},$$

de donde se deduce que $E[X^k] = \dfrac{\Gamma(a+k)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+k)}$, por tanto se tiene que $E[X] = \dfrac{a}{a+b}$, $V[X] = \dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

Ejemplo 6.12 *Sea X una v.a. con distribución $\beta(4,2)$, el cálculo de $E[X]$, $V[X]$ y $P(0 < X \leq 0'7)$ es:*

$$E[X] = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad y \quad V[X] = \frac{8}{6^2 \cdot 7}.$$

Además,

$$\begin{aligned} P(0 < X \leq 0'7) &= \int_0^{0'5} \frac{1}{20}(x^3 - x^4)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{20}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^{0'5} \\ &= 0'00132. \end{aligned}$$

11. Distribución de Cauchy

Se dice que una variable aleatoria X sigue una distribución de Cauchy de parámetros μ y θ, y se denota por $X \sim C(\mu,\theta)$, si su función de densidad viene dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{\mu}{\pi} \frac{1}{\mu^2 + (x - \theta)^2} \qquad -\infty < x < \infty, \quad \mu > 0.$$

La variable aleatoria $Y = \dfrac{X - \theta}{\mu}$ verifica que $Y \sim C(1, 0)$, es decir, Y tiene como función de densidad

$$f(y) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \qquad -\infty < x < \infty.$$

La distribución Cauchy es utilizada en teoría de estadísticos ordenados y como distribución a priori de leyes de probabilidad en modelos bayesianos. Modela también las duraciones de actividades sobre las que no existe suficiente información en el análisis de métodos Pert de secuenciación de actividades.

Propiedad 6.13 *Sea $X \sim C(\mu, \theta)$, se tiene que $E[X^k]$ no existe para $k \geq 1$ y que existe para $k < 1$.*

Propiedad 6.14 *Sea $X \sim C(\mu_1, \theta_1)$ e $Y \sim C(\mu_2, \theta_2)$ independientes, entonces $X + Y \sim C(\mu_1, +\mu_2, \theta_1 + \theta_2)$.*

Propiedad 6.15 *Se tiene que $X \sim C(1, 0)$ si y sólo si $\frac{1}{X} \sim C(1, 0)$.*

Ejemplo 6.13 *Un ejercicio de orientación para una persona ciega consiste en hacerla andar en línea recta entre dos paredes paralelas que distan un kilómetro. El grado de desorientación D es la distancia entre el lugar más cercano desde el punto de partida a la segunda pared y el punto en el que la persona ciega alcanzó la segunda pared. Suponiendo que el ángulo θ que forma la primera pared y la dirección escogida por esa persona sigue una distribución uniforme* *en $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. Obtenga la distribución del grado de desorientación.*

Para calcular el grado de desorientación véase que $D = \tan(\theta)$ y que $f_\theta(\theta) = \frac{1}{\theta}$ para $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. A partir de aquí se calcula la función de distribución de D:

$$\begin{aligned} F_D(d) &= P(D \leq d) = P(\tan(\theta) \leq d) \\ &= P(\theta \leq \arctan(d)) \\ &= \frac{\arctan(d) + \dfrac{\pi}{2}}{\pi}. \end{aligned}$$

Con lo cual la función de densidad es:

$$f_D(d) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+d^2} \qquad -\infty \leq d \leq \infty$$

Se trata de una distribución Cauchy de parámetros 1 y 0.

12. Distribuciones derivadas de la normal

12.1. Distribución lognormal

Dada una variable aleatoria $X \sim N(\mu, \sigma)$, se dice que la variable aleatoria $Y = e^X$ sigue una distribución lognormal. La función de densidad de dicha distribución es:

$$f(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathrm{Ln}(y)-\mu)^2}, \quad y > 0.$$

Se tiene que $E[Y] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ y $V[Y] = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.

La distribución lognormal es el resultado de un número elevado de causas independientes con efectos positivos que se componen de manera multiplicativa y donde cada una de estas causas tienen un efecto despreciable frente al global. Esto se debe a que la aditividad de los efectos conduce a una ley normal, en el caso de la ley lognormal, lo hace la proporcionalidad de los efectos.

En el campo industrial, la ley lognormal, puede recibir justificaciones teóricas como las características de un material (resistencia, dureza, etc.) que puede resultar de la combinación multiplicativa de factores elementales. También en el campo económico la ley lognormal se encuentra con frecuencia (distribución de salarios, ventas, etc.).

Ejemplo 6.14 *Se estudia la proporción de rentistas por encima de 18.000€ anuales para un sector económico cuya distribución salarial medida en miles de euros sigue un modelo logaritmo normal con parámetros $\mu = 2$ y $\sigma = 1'2$.*

Se define la variable aleatoria

$$Y = \{\textit{renta en dicho sector económico}\}.$$

Puesto que Y sigue una distribución lognormal, se puede considerar una variable $X \sim N(\mu, \sigma)$, tal que, $Y = e^X$, por tanto;

$$\begin{aligned}
P(Y \geq 18) &= P(e^X \geq 18) = P(X \geq 2'89) \\
&= P\left(\tfrac{X-\mu}{\sigma} \geq \tfrac{2'89-2}{1'2}\right) \\
&= P(Z \geq 0'74) = 1 - P(Z \leq 0'74) \\
&= 1 - 0'7704 = 0'2296.
\end{aligned}$$

12.2. Distribución χ^2

Se dice que una variable aleatoria X sigue una distribución χ^2 con n grados de libertad, se denota por χ^2_n, si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x \geq 0.$$

Se observa que la distribución χ^2_n es una distribución $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$, de donde se deduce que esta distribución es reproductiva en su parámetro y que $E[X] = n$, $V[X] = 2n$ y $M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$.

Propiedad 6.16 *Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una $N(0,1)$, se tiene que $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2$.*

Ejemplo 6.15 *Sea V, la velocidad (cm/seg) de un objeto que tiene una masa de 1 Kg., una variable aleatoria con distribución $N(0,25)$. Si $K = \frac{mV^2}{2}$ representa la energía cinética del objeto y se necesita saber la probabilidad de que $K < 400$.*

Puesto que $m = 1$, se tiene que;

$$\begin{aligned} P(K < 400) &= P\left(\frac{mV^2}{2} < 400\right) \\ &= P\left(\frac{V^2}{625} < \frac{400 \cdot 2}{625}\right) \\ &= P\left(\frac{V^2}{625} < 1'28\right) \\ &= P(\chi_1^2 < 1'28) = 0'725. \end{aligned}$$

12.3. Distribución t de Student

Sean X e Y dos variables aleatorias independientes distribuidas según una distribución $N(0,1)$ y χ_n^2, respectivamente.La variable aleatoria

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}},$$

sigue una distribución t-Student con n grados de libertad que se denota por t_n.

La función de densidad de esta distribución es

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}(1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Se verifica que $E[X] = 0$ y $V[X] = \dfrac{n}{n-2}$ para $n > 2$.

Propiedad 6.17 *La distribución t de Student es simétrica con respecto al origen.*

12.4. Distribución $\mathcal{F}$ de Snedecor

Sean X e Y dos variables aleatorias independientes distribuidas según una χ^2 con n y m grados de libertad respectivamente. La variable aleatoria

$$F = \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}},$$

sigue una distribución $\mathcal{F}$ de Snedecor con n y m grados de libertad que se denota por $\mathcal{F}_{n,m}$.

La función de densidad de esta distribución viene dada por

$$f(x) = \frac{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} (n+mx)^{-\frac{n+m}{2}}, \quad x \geq 0.$$

Se tiene que $E[X^k] = \left(\frac{n}{m}\right)^k \frac{\Gamma(k+\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-k)}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}$ para $n > 2k$, por tanto, $E[X] = \frac{n}{n-2}$ con $n > 2$ y que $V[X] = \frac{n^2(2m+2n-4)}{m(n-2)^2(n-4)}$ con $n > 4$.

Propiedad 6.18 *Si $X \sim \mathcal{F}_{n,m}$ entonces $\frac{1}{X} \sim \mathcal{F}_{m,n}$.*

Propiedad 6.19 *Si $X \sim t_n$ entonces $X^2 \sim \mathcal{F}_{1,n}$.*

Ejemplo 6.16 *Las calificaciones de los alumnos en dos asignaturas A y B se distribuyen normalmente con idéntica dispersión σ^2. Se ha observado una muestra aleatoria simple de 51 alumnos presentados al examen de la asignatura A y otra, independiente de la anterior, de 19 alumnos presentados al examen de B. ¿Cuál será la probabilidad de que la varianza observada en la primera muestra sea al menos el doble de la correspondiente a la segunda?*

Sean S_A^2 *y* S_B^2 *las varianzas muestrales de las calificaciones correspondientes a las asignaturas* A *y* B. *Puesto que* S_A^2 *y* S_B^2 *son variables aleatorias independientes tales que*

$$51\frac{S_A^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{50}$$

y que

$$19\frac{S_B^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{18}.$$

Por tanto,

$$\frac{51 \cdot 18 \cdot S_A^2}{50 \cdot 19 \cdot S_B^2} \sim \mathcal{F}_{50,18}.$$

De este modo,

$$P\left(\frac{S_A^2}{S_B^2} \geq 2\right) = P\left(\frac{51 \cdot 18 \cdot S_A^2}{50 \cdot 19 \cdot S_B^2} \geq 0'48\right)$$

$$= P(F_{50,18} \geq 0'48) = 0'9787.$$

13. Distribución de Laplace

Se dice que una variable aleatoria X sigue una distribución de Laplace de parámetros λ y μ, $La(\lambda, \mu)$, si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x-\mu|}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \lambda > 0 \ \text{ y } \ -\infty < \mu < \infty.$$

La función generatriz de momentos de esta distribución tiene la expresión

$$M_X(t) = (1 - \lambda^2 t^2)^{-1} e^{\mu t}, \qquad \text{con } t < \frac{1}{\lambda},$$

de donde se deduce que $E[X] = \mu$ y $V[X] = \dfrac{2}{\lambda^2}$.

La distribución Laplace es una alternativa a la normal para medir los errores de la media.

14. Distribución logística

Se dice que una variable aleatoria X sigue una distribución logística de parámetros a y b, $Lo(a,b)$, si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{be^{-(a+bx)}}{(1+e^{-(a+bx)})^2}; \quad -\infty < x < \infty, \ b > 0,$$

siendo su función de distribución

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-(a+bx)}}.$$

Este tipo de distribuciones son usuales en los fenómenos que estudian el crecimiento temporal, como por ejemplo los de origen demográfico.

15. Distribución de Pareto

Se dice que una variable aleatoria X sigue una distribución de Pareto de parámetros α y β, $P(\alpha,\beta)$, si su función de densidad viene dada por la expresión

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}} & \text{si } x \geq \alpha \text{ y } \alpha,\beta \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Se tiene que $E[X] = \dfrac{\alpha\beta}{\beta-1}$ y que $V[X] = \dfrac{\alpha^2\beta}{(\beta-2)(\beta-1)^2}$.

Pareto introdujo esta distribución para describir unidades económicas según la extensión (salarios, rentas, empresas según ventas, ...).

Ejemplo 6.17 *Las rentas salariales anuales en cierto sector económico (X, en miles de euros) es una magnitud aleatoria distribuida según un modelo de Pareto con salario mínimo 9 y $\beta = 2'4$.*

Se desea conocer el salario esperado en el sector y la proporción de asalariados que percibe más de 18.000€/año.

Puesto que X sigue una distribución Pareto se tiene que el salario esperado viene dado por

$$E[X] = \frac{\alpha \cdot \beta}{1-\beta} = \frac{9 \cdot 2'4}{1'4} = 15'43.$$

La proporción de asalariados que perciben más de 18.000€ es

$$\begin{aligned} P(X > 18) &= 1 - P(X \leq 18) \\ &= 1 - \int_9^{18} \frac{2'4 \cdot 9^{2'4}}{x^{3'4}} \, \mathrm{d}\, x \\ &= 1 - \left[-9^{2'4} x^{-2'4} \right]_9^{18} \\ &= 1 - \left[-9^{2'4} \left(18^{-2'4} - 9^{-2'4} \right) \right] \\ &= 1 - 0'81 = 0'19. \end{aligned}$$

16. Algunos modelos multidimensionales

16.1. Distribución multinomial

La distribución multinomial es una generalización de la binomial, en la que el experimento que la genera arroja $k > 2$ resultados distintos en cada realización –la binomial es una distribución dicotómica–, donde las probabilidades de cada uno de los resultados permanece constante a lo largo de todo el proceso. La distribución multinomial se obtiene al realizar, de forma independiente, n pruebas individuales y contar el número de veces que aparece cada resultado. Si se llama A_i al i-ésimo resultado, siendo $P(A_i) = p_i$ y X_i al número de veces que se obtiene A_i en las n pruebas, X_i será la componente i-ésima de la variable k-dimensional X. La distribución de probabilidades de la variable multinomial es:

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k},$$

donde $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Ejemplo 6.18 *Se lanza un dado 5 veces. Determine la probabilidad de obtener un uno, dos doses y dos cuatros.*

Sea $A_i = \{Obtener\ i\ puntos\ en\ el\ dado\}$.

La probabilidad que se pide es:

$$\begin{aligned} & P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 0, X_4 = 2, X_5 = 0, X_6 = 0) \\ = & \ \tfrac{5!}{1!\ 2!\ 0!\ 2!\ 0!\ 0!} \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{6^2} \cdot \tfrac{1}{6^2} = 0'0038. \end{aligned}$$

16.2. Distribución uniforme bidimensional

También se puede generalizar la distribución uniforme al caso de más de una dimensión, se trata el caso $n = 2$, pudiendo comprobar el lector que la generalización para cualquier otra dimensión no entraña la menor dificultad. Se dice que una variable bidimensional $X = (X_1, X_2)$ sigue una distribución uniforme si su función de densidad viene dada por la expresión:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & \text{si} \quad x_1 \in (a, b), x_2 \in (c, d) \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Ejemplo 6.19 *Dos amigos se citan entre las nueve y las diez de la noche, acordando no esperarse más de 10 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que se encuentren?*

Se sabe que el tiempo de espera para cada uno se distribuye según una $U(0, 60)$, por lo tanto la distribución conjunta viene dado por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{60 \cdot 60} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 60 \text{ y } 0 \leq y \leq 60 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para que se encuentren los amigos debe ocurrir que $|X - Y| \leq 10$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} & P(|X - Y| \leq 10) = P(-10 \leq X - Y \leq 10) \\ = & \ P(Y - 10 \leq X \leq Y + 10) \\ = & \int_0^{10} \int_0^{y+10} \frac{1}{3600} \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y \\ & + \int_{10}^{50} \int_{y-10}^{y+10} \frac{1}{3600} \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y \\ & + \int_{50}^{60} \int_{y-10}^{60} \frac{1}{3600} \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y = \frac{11}{36}. \end{aligned}$$

16.3. Distribución normal multidimensional

Se dice que una variable n-dimensional $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ sigue una distribución normal si su función de densidad es:

$$f(X) = \frac{1}{|M|^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(X-\bar{\mu})M^{-1}(X-\bar{\mu})^t}.$$

Donde M es la matriz de covarianzas y $\bar{\mu}$ el vector de medias.

La función de densidad de la distribución para el caso de una variable bidimensional, que es la única que se puede representar, tiene forma de hongo con asíntotas en cualquier dirección del plano x_1x_2. Además, al cortar la superficie de densidad con cualquier plano perpendicular al x_1x_2 se obtienen curvas con forma de campana. Más formalmente se verifican las siguientes propiedades:

1. Para una variable normal n-dimensional, cualquier subconjunto de $r < n$ variables tiene conjuntamente distribución normal.
2. Si las variables $X_1, X_2, \cdots, X_n$ están incorreladas, entonces son independientes.
3. Cualquier combinación lineal de variables normales es normal. Así, si $Y = XA$, donde A es una matriz de m filas y n columnas, entonces Y es normal con media $\bar{\mu}_X A$ y matriz de covarianzas $A^t M_X A$.

Ejemplo 6.20 *Sea (X, Y) una v.a. normal, cuya función de densidad viene dada por:*

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-(y^2+2x^2-2xy)}{2}} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Calcule el vector de medias y la matriz de covarianzas.

Igualando términos con la distribución teórica, se tiene:

- $|M| = 1$
- $-\frac{(X-\bar{\mu})M^{-1}(X-\bar{\mu})^t}{2} = -\frac{y^2+2x^2-2xy}{2}$

Por lo tanto:

$$\bar{\mu} = (0,0) \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Con lo que:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

17. Ejercicios

17.1. Ejercicio resuelto

6.1 La resistencia de una muestra de un determinado material viene dado por una variable aleatoria, X, con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{2x+1}{8} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

a) Calcule su función de distribución.
b) Calcule $P(0'5 \leq X \leq 1'5)$.
c) Una muestra de material se encuentra en estado ideal de resistencia si ésta se encuentra entre $0'5$ y $1'5$. Si se consideran 10 muestras de materiales, ¿cuál es la probabilidad de que al menos el 70 % de ellos tenga resistencia ideal?
d) ¿Cuál será el número medio de materiales con resistencia no ideal que se tendrá que escoger hasta encontrar uno con resistencia ideal?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que se necesiten 10 muestras para obtener tres de resistencia ideal?

Solución:

a) Usando la definición de función de distribución se obtiene que

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0 \text{ si } x < 0,\\
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{0}^{x} x\,\mathrm{d}\,x = \frac{x^2}{2} \quad \text{si } 0 \leq x < 1,\\
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{0}^{1} x\,\mathrm{d}\,x + \int_{1}^{x} \frac{2x+1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{x^2+x}{8}\Big|_{1}^{x}\\
&= \frac{1}{2} + \frac{x^2+x-2}{8} \quad \text{si } 1 \leq x < 2,\\
F(x) &= 1 \quad \text{si } x \geq 2,
\end{aligned}
$$

Es decir, la función de distribución viene dada por

$$
F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{x^2+x-2}{8} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}
$$

b) Usando el apartado anterior se obtiene

$$
P(0'5 \leq X \leq 1'5) = F(1'5) - F(0'5) = \frac{1}{2} + \frac{(1'5)^2 + 1'5 - 2}{8} - \frac{0'5^2}{2} = 0'59.
$$

c) Se tiene que la resistencia de una muestra de material es ideal con probabilidad $0'59$ y no ideal $0'41$. Por tanto, el experimento de observar si una muestra es ideal o no, es un experimento Bernouilli con probabilidad de éxito (ser ideal) $0'59$. Con lo cual, el experimento de observar el número de muestras ideales (éxitos) en diez muestras de materiales extraídas aleatoriamente es una distribución binomial de parámetro $n = 10$ y $p = 0'59$. Si se define la variable aleatoria

$$
\begin{aligned}
Y \;=\; &\{\text{número de muestras con resistencia ideal entre 10 muestras}\\
&\text{extraídas aleatoriamente}\},
\end{aligned}
$$

se tiene que $Y \sim B(10, 0'59)$. Por tanto, la probabilidad pedida es

$$
P(Y \geq 7) \;=\; P(Y = 7) + P(Y = 8) + P(Y = 9) + P(Y = 10)
$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{10}{7}\cdot 0'59^7\cdot 0'41^3+\binom{10}{8}\cdot 0'59^8\cdot 0'41^2\\
&\quad +\binom{10}{9}\cdot 0'59^9\cdot 0'41^1+\binom{10}{10}\cdot 0'59^10\cdot 0'41^0\\
&= 0'3575.
\end{aligned}$$

d) Observe que el experimento descrito en este apartado consiste en ir comprobando la resistencia de los materiales hasta encontrar una que sea ideal. Se sabe, por el apartado anterior, que el experimento de probar si una muestra tiene resistencia ideal es un experimento Bernouilli, además puesto que las muestras son independientes, en este apartado, se está contando el número de fracasos (muestras no ideales) que hay que observar hasta conseguir un éxito (muestra ideal) en experimentos Bernouilli independientes. Por tanto, si se define la variable aleatoria

$$W = \{\text{ número de muestras no ideales (fracasos) antes de encontrar una muestra ideal (éxito)}\},$$

se tiene que $W \sim Ge(0'59)$.

En este apartado se pide el número medio de fracasos hasta conseguir un éxito, es decir, $E[W] = \dfrac{0'41}{0'59} = 0'695$.

e) Siguiendo con el razonamiento anterior, en este apartado se está pidiendo el número de fracasos (muestras no ideales) antes de obtener el tercer éxito (muestra ideal). Por tanto, si se define la variable aleatoria $T = \{\text{número de fracasos antes del tercer éxito}\}$, se tiene que, $T \sim BN(3, 0'59)$.

Por tanto, se está pidiendo la probabilidad de que haya 7 fracasos, es decir,

$$P(T = 7) = \binom{9}{7}\cdot 0'59^3\cdot 0'41^7 = 0'0144.$$

17.2. Ejercicios propuestos

6.1. Dada la distribución $B(10, 0'4)$ calcule las siguientes probabilidades:

a) $P(X \leq 8)$,
b) $P(2 < X \leq 5)$,
c) $P(X \geq 7)$.

6.2. Un conocido fumador gorrón ha explotado tanto a sus compañeros que por término medio cada uno de ellos le da un cigarrillo de cada diez veces que éste les pide.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que consiga un cigarrillo en menos de cinco intentos?

b) Si pretende hacer acopio de cigarrillos para el fin de semana, ¿cuántas veces, en promedio, tendrá que pedir tabaco para conseguir 20 unidades?

6.3. A un establecimiento de apuestas deportivas llega un cliente cada tres minutos por término medio.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un periodo de cinco minutos lleguen más de cinco clientes?

b) ¿Cuál es el número más probable de llegadas en media hora?

6.4. Las compañías aéreas acostumbran a reservar más plazas de las existentes en sus vuelos, dado el porcentaje de anulaciones que se produce. Si el porcentaje medio de anulaciones es del 5 %, ¿cuántas reservas deberá hacer una compañía para un vuelo con 200 plazas, si quiere garantizar al 97 % que todos sus clientes tendrán cabida en dicho vuelo?

6.5. El servicio de reclamaciones de una asociación de consumidores recibe por término medio tres quejas a la hora.

a) Calcule la probabilidad de que en una hora no reciba ninguna reclamación.

b) Calcule la probabilidad de que en dos horas reciba entre dos y seis reclamaciones.

6.6. En una pecera hay diez peces machos y ocho hembras, si se extraen aleatoriamente cinco peces, calcule la probabilidad de que tres sean machos y dos hembras.

6.7. Un jugador apuesta 5€ por tirada a un número de los 37 que componen la ruleta, si acierta, gana 180€. Calcule sus beneficios esperados al cabo de 100 jugadas.

6.8. Por una estación pasa un tren de cercanías cada treinta minutos. Si una persona, que desconoce los horarios, llega a la estación para tomar dicho tren, ¿cuál es la probabilidad de que tenga que esperar menos de cinco minutos?

6.9. ¿Cuál es la probabilidad de que de 10 personas elegidas al azar al menos 2 cumplan años en el mes de Enero?

6.10. Durante la Segunda Guerra Mundial los alemanes bombardearon repetidas veces Londres. Los expertos demostraron que se trataba de bombardeos indiscriminados y que caían en cada acción y por término medio dos bombas por cada cuadrícula de cien metros de lado. En vista a lo anterior, calcule la probabilidad de que en una cierta cuadrícula de cincuenta metros de lado no haya caído ninguna bomba durante un bombardeo.

6.11. Dada una distribución normal de media 3 y varianza 9, calcule las siguientes probabilidades:

a) $P(2 \leq X \leq 5)$,
b) $P(X \geq 3)$,
c) $P(X \leq -2)$.

6.12. Calcule en los siguientes casos el valor de a, sabiendo que $X \sim N(1, 5)$.

a) $P(0 \leq X \leq a) = 0'28$,
b) $P(1 - a \leq X < 1 + a) = 0'65$.

6.13. Se sabe que la alarma de un reloj saltará en cualquier momento entre las siete y las ocho de la mañana. Si el propietario del reloj se despierta al oír dicha alarma y necesita, como mínimo, veinticinco minutos para arreglarse y llegar al trabajo,

a) ¿cuál es la probabilidad de que llegue antes de las ocho?

b) Si el dueño del reloj sigue programando el reloj de la misma manera durante 10 días, calcule el número más probable de días en que llegará después de las ocho.

6.14. De una tribu indígena se sabe que los hombres tienen una estatura que se distribuye según una ley normal con media 1'70 y desviación típica σ. Si a través de estudios realizados se conoce que la probabilidad de que su estatura sea mayor a 1'80 es 0'12, calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar mida entre 1'65 y 1'75.

6.15. Calcule la probabilidad de obtener más de 200 seises en 1200 lanzamientos de un dado honrado.

6.16. En una gasolinera se ofrecen tres servicios: suministrar gasolina, lavar coches y comprobar la presión de neumáticos. Estos servicios son demandados con una probabilidad de 0'9, 0'05 y 0'05 respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que de diez coches que lleguen, seis vayan a repostar, tres vayan al lavado y uno a comprobar la presión?

6.17. Una máquina produce piezas que según su peso pueden clasificarse en "pesadas", "normales" y "ligeras". Por experiencia se ha estimado que el 30 % son pesadas y el 60 % normales. De cinco piezas extraídas, ¿cuál es la probabilidad de que dos sean pesadas y dos normales?

6.18. Se eligen al azar dos números en el intervalo (0,2). ¿Cómo se distribuyen esos números? ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de dichos números sea menor que dos?

6.19. El peso de dos tipos de caracoles sigue una distribución normal bivariante con parámetros:

$$\bar{\mu} = (3,4), \quad M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcule $P(2 \leq X \leq 3'5)$ y $P(3X - Y \leq 2)$.

6.20. Sea X una variable aleatoria que mide la cantidad de pH en una determinada sustancia y que tiene como función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ k(x - \frac{x^2}{2}) + \frac{1}{8} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ \frac{5}{8} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

a) Calcule k para que sea función de distribución.

b) Calcule $P(0 \leq X \leq 1)$.

c) Se considera que esa sustancia es altamente contaminante si su pH está comprendido entre $\frac{1}{2}$ y 1. ¿Determine la probabilidad de que entre 10 muestras de dicha sustancia, tres resulten altamente contaminantes?

6.21. Se sabe que en un colegio de primaria el 50 % de los alumnos son menores de 9 años, el 30 % tienen una edad comprendida entre 9 y 11 años y el 20 % tienen una edad superior a 11 años. Se escogen 20 alumnos al azar, se pide:

a) La probabilidad de que al menos haya uno de edad superior a 11 años.

b) El número esperado de alumnos con edad entre 9 y 11 años.

c) La varianza del número de alumnos con edad superior o igual a 9 años.

6.22. En la central del 061 se sabe que el 15 % de las llamadas corresponden a urgencias debidas a un accidente de tráfico. ¿Cuál es la probabilidad de recibir tres llamadas antes del primer aviso telefónico por accidente de tráfico? ¿Cuál es el número medio de llamadas que se reciben hasta que una de ellas avisa de un accidente de tráfico?

6.23. El número de personas que llegan a la ventanilla de un banco sigue una ley Poisson. Se sabe que la varianza del número de llegadas en un minuto es 4.

a) Calcule la probabilidad de que en un minuto no lleguen más de dos personas.

b) Si la persona que atiende la ventanilla se bloquea cuando llegan más de dos personas, ¿cuál es la probabilidad de que entre diez minutos escogidos al azar durante un día se haya bloqueado en dos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que después de 10 minutos se bloquee por segunda vez?

6.24. El número de llamadas recibidas en una centralita en 15 minutos sigue una Poisson de media 1.

a) Calcule la probabilidad de que si a las 5:30 se ha recibido una llamada, la siguiente se produzca después de las 6:10.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en 20 minutos se reciban 3 llamadas?

6.25. El número de personas que llegan a un semáforo para cruzar la calle sigue una ley Poisson. Se sabe que por término medio llegan dos personas cada cinco minutos.

a) Calcule la probabilidad de que en 7 minutos lleguen 3 personas.

b) Calcule la probabilidad de que el tiempo transcurrido entre dos llegadas sea superior a 3 minutos.

6.26. El cañón de luz de una prisión gira sobre si mismo de forma que tarda en alumbrar una misma zona 40 segundos. Un preso organiza una fuga de la prisión necesitando 27 segundos para llegar y escalar el muro. Si el preso emprende una fuga eligiendo el momento de forma aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que no sea visto?

6.27. En un hospital de maternidad se sabe que el peso de un niño recién nacido sigue una ley normal, que 2 de cada 10 niños pesa más de 4'5 Kg. y que 7 de cada 10 niños pesan menos de 3'5 Kg.

a) Calcule la probabilidad de que un niño pese entre 2'75 y 3'75 Kg.

b) Si se considera que un niño tiene un peso ideal si su peso esta comprendido entre 2'75 y 3'75. ¿Cuál es la probabilidad de que al considerar bebés aleatoriamente obtengamos que el segundo bebé con peso ideal sea el quinto considerado?

6.28. Un fabricante de papel de aluminio vende rollos de 8 metros. Para ello, sabe que la longitud de los rollos cortados sigue una distribución normal de media 7'5 metros. Además se sabe que el 20 % de los rollos miden más de 8 metros.

a) Calcule la probabilidad de que un rollo mida más de 9 metros.

b) Si el empresario almacena sus rollos y quiere encontrar algún rollo con más de 8 metros, ¿cuántos rollos deberá medir en promedio?

6.29. Un avión tiene la misión de bombardear un edificio cuya vista aérea es un rectángulo de 100 metros de largo y 50 metros de ancho. Se sabe que el edificio quedará seriamente dañado si la bomba cae en el círculo central de radio 2 metros o en los triángulos formados por las esquinas y que tienen 2 metros como longitud de sus catetos. Calcule la probabilidad de que el edificio resulte seriamente dañado.

6.30. Probar que si X e Y son $N(0,1)$ e independientes, entonces $\frac{X}{Y}$ sigue una distribución de Cauchy.

6.31. En una carretera se han observado los intervalos entre el paso de dos vehículos sucesivos (X, en segundos), esta magnitud sigue un modelo gamma con a=1 y p=20'5. Calcule la probabilidad de que el tiempo transcurrido entre el paso de dos vehículos sea mayor de 28'9 segundos.

6.32. El tiempo de funcionamiento de un sistema de radar se modela como una distribución gamma con a = 1'5 y p = 2. Determine la probabilidad de que el sistema funcione al menos 1 año antes del fallo. ¿Con qué probabilidad el fallo se produce durante el segundo año desde su puesta en funcionamiento?

6.33. Se ha determinado que el tiempo de reparación en un taller de mantenimiento sigue una distribución lognormal de media 7 horas y desviación típica 4 horas.

a) ¿Con qué probabilidad una reparación superará las 10 horas?

b) ¿Qué proporción de reparaciones tienen un tiempo de ejecución entre 8 y 16 horas?

6.34. Se sabe que el tiempo de funcionamiento en años de un sistema se distribuye según una χ^2 con 7 grados de libertad. ¿Con qué probabilidad el sistema funcionará al menos tres años?