Estadística Descriptiva y Probabilidad

(Teoría y problemas)

3ª Edición

Autores
I. Espejo Miranda
F. Fernández Palacín
M. A. López Sánchez
M. Muñoz Márquez
A. M. Rodríguez Chía
A. Sánchez Navas
C. Valero Franco

UCA Universidad de Cádiz

Servicio de Publicaciones

Edita: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz
C/ Dr. Marañón, 3
11002 Cádiz

http://www.uca.es/publicaciones

ISBN: 978-84-9828-058-6

Depósito legal:

Estadística Descriptiva y Probabilidad. Teoría y Problemas (Revisión: Febrero 2006)
I. Espejo Miranda, F. Fernández Palacín, M. A. López Sánchez, M. Muñoz Márquez, A. M. Rodríguez Chía, A. Sánchez Navas, C Valero Franco

http://www.uca.es/teloydisren

Capítulo 5

Variable aleatoria

1. Concepto

En el capítulo anterior se introducía el concepto de probabilidad definido sobre el álgebra de Boole de los sucesos. Sin embargo, este concepto presenta el inconveniente de que no es susceptible de un buen manejo matemático, debido fundamentalmente a la diversidad de las categorías de los resultados de un experimento, de ahí que sea necesario realizar una abstracción cuantificada de dicho experimento que permita agrupar los sucesos según determinadas características comunes y consecuentemente se facilite su manejo y la aplicación del análisis matemático. Dicha abstracción se realiza asignando un número real a cada suceso del espacio muestral. La función mediante la cual se realiza esta correspondencia recibe el nombre de *variable aleatoria*. Más formalmente, se define la variable aleatoria como cualquier función medible que asocia a cada suceso un número real.

Profundizando en la idea de variable aleatoria como abstracción de los resultados de un experimento aleatorio, y puesto que cada suceso tiene una determinada probabilidad de ocurrencia, se puede trasladar dicha probabilidad al valor correspondiente de la variable aleatoria, por lo que se puede hablar de la probabilidad de que una variable aleatoria tome un determinado valor. Así,

1. Al lanzar una moneda, se le puede asociar el valor 1 al suceso elemental "cara" y el valor 0 al suceso "cruz".

2. Al lanzar dos dados al aire se puede asociar a cada resultado la suma de los puntos obtenidos.

Es importante observar que la asignación de valores a los resultados del experimento no es única, de hecho basta con fijar valores distintos a resultados distintos, para obtener una infinidad de funciones. No obstante, la idea es que dicha asignación sea lo más natural posible para que una vez manipulada la variable aleatoria los resultados sean fácilmente interpretables en términos del experimento de partida.

2. Variables discretas y continuas

Una variable aleatoria, en lo sucesivo v.a., se denomina *discreta* si toma valores aislados o puntuales.

Ejemplo 5.1 *La variable X="Número de hijos varones de una familia de 2 hijos", puede tomar los valores 0, 1 y 2. Si se desea calcular la probabilidad de que X tome cada uno de sus valores posibles, suponiendo que la probabilidad de que un hijo sea varón es 0'49, y en el supuesto de que los sucesos sean independientes, se tiene que:*

$$\begin{aligned} P(X=2) &= 0'49 \cdot 0'49 = 0'2401 \\ P(X=1) &= 0'49 \cdot 0'51 + 0'51 \cdot 0'49 \\ &= 0'4998 \\ P(X=0) &= 0'51 \cdot 0'51 = 0'2601\ . \end{aligned}$$

Siendo la suma de estas probabilidades, como era de esperar, la unidad.

Una v.a. es *continua* si puede tomar cualquier valor dentro de uno o varios intervalos determinados. Así, la variable X que asocia a cada individuo de un colectivo su estatura es continua; en este caso, la probabilidad de que la variable tome exactamente un valor determinado, 160 cms. por ejemplo, es cero. Esto tiene su justificación intuitiva, desde el punto de vista de la regla de Laplace, en que el número de casos favorables es uno sólo, mientras que el número de casos posibles es infinito. De hecho, esa es la principal característica de la variable continua y obligará a darle un tratamiento especial.

Para terminar, se puede considerar una v.a. *mixta*, la cual toma valores dentro de uno o varios intervalos y algunos valores puntuales más fuera de él o de ellos.

Lo dicho hasta ahora vale tanto para experimentos simples –lanzar un dado y anotar el número de la cara superior–, como para experimentos complejos –medir el peso, la estatura y la edad en años de un grupo de personas–. En el primer caso la variable asociada será unidimensional –discreta en el ejemplo–, y en el segundo multidimensional, tridimensional, continua para las dos primeras dimensiones y discreta para la edad.

3. Variables unidimensionales

3.1. Caracterización de variables aleatorias

Como se ha visto, la v.a. es una abstracción numérica que se hace de los resultados de un experimento aleatorio, y puesto que cada suceso tiene una determinada probabilidad de ocurrencia se traslada dicha probabilidad al valor correspondiente de la v.a. Si la variable es discreta y toma pocos valores distintos, como en el ejemplo de los hijos varones, es factible, e incluso conveniente, dar todos esos valores con sus probabilidades de una forma explícita. Pero si la variable es discreta y toma muchos valores diferentes (tal vez infinitos) o si es continua, lo anterior es poco recomendable o incluso imposible. Por ello es necesario apoyarse en una serie de funciones, relacionadas íntimamente con dichas probabilidades, que nos permitan resolver el problema. Estas funciones son la *función de cuantía* en el caso discreto, la de *densidad* en el continuo; así como, la de *distribución*, la *característica* y la *generatriz de momentos*, entre otras, en ambos casos. Este apartado se centra en las tres primeras.

3.1.1. Caso discreto

Si una v.a. toma valores $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, (finitos o infinitos) la regla que asocia a cada uno de ellos las probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, respectivamente, donde $p_i = P(X = x_i)$ se denomina *función de cuantía*. Como la suma de todas las probabilidades de los sucesos elementales es uno, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{(n/\infty)} p_i = 1 \ .$$

Una v.a. discreta queda perfectamente determinada cuando se conoce su función de cuantía, pudiéndose expresar ésta de dos formas, por extensión o a través de una función.

Ejemplo 5.2 *Utilizando la distribución del ejemplo 5.1, la función de cuantía puede darse como:*

x	$P(X = x)$
0	$0'2601$
1	$0'4998$
2	$0'2401$

O bien:

$$P(X = x) = \binom{2}{x} 0'49^x \cdot 0'51^{2-x}$$

para $x = 0, 1, 2$.

Otra forma de caracterizar una v.a. es a través de la llamada *Función de Distribución*, definida por:

$$F(x) = P(X \leq x) \ .$$

La función de distribución en un valor x, es la probabilidad de que X tome valores menores o iguales a x. Es decir, es una función que acumula toda la probabilidad entre menos infinito y el punto donde está definida.

Propiedades de la función de distribución. La función de distribución de una variable aleatoria discreta cumple las siguientes propiedades (figura 5.1):

1. Está definida en toda la recta real.
2. Es no decreciente y no negativa.
3. Toma el valor cero en menos infinito y el valor uno en más infinito.
4. Sólo tiene discontinuidades de salto -precisamente en los puntos donde la función de cuantía es distinta de cero-.

Ejemplo 5.3 *Algunos valores de la función de distribución para el ejemplo que se arrastra son:*

$$\begin{aligned}
F(-0'5) &= P(X \leq -0'5) = 0 \\
F(0) &= P(X = 0) = 0'2601 \\
F(1) &= P(X = 0) + P(X = 1) = 0'7599 \\
F(2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\
&= 1 \\
F(2'5) &= 1\ .
\end{aligned}$$

Y de aquí es fácil ver que:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0'2601 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0'7599 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 2\ . \end{cases}$$

Esta función se representa gráficamente en la figura 5.1.

3.1.2. Caso continuo

Como se dijo en su presentación, la característica principal de la variable continua es que la probabilidad de que tome un determinado valor es cero. Sin embargo, aún siendo ello cierto, no todos los valores tienen "la misma ocurrencia". Se puede comprobar que hay bastantes

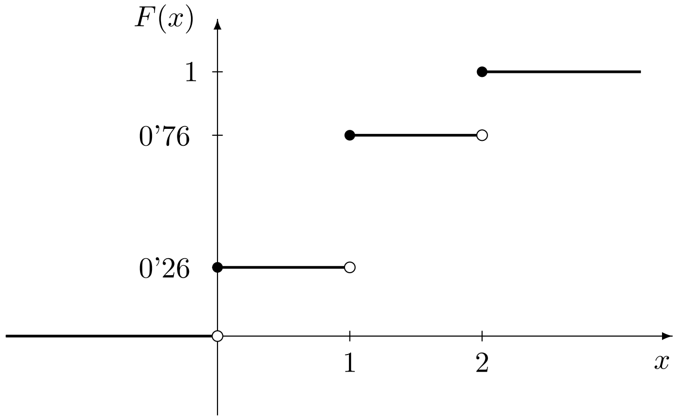

Figura 5.1: Función de distribución discreta.

individuos que tienen estatura alrededor de 160 cms, muchos menos alrededor de 210 cms y ninguno en el entorno de los 350 cms. Lo anterior hace que interese, no ya la probabilidad de tomar exactamente un valor, sino la probabilidad de que la variable se encuentre en el entorno de un punto, es decir, que tome valores dentro de un intervalo. Así, se considera un intervalo pequeño centrado en 160 cms. y de amplitud Δ, sea éste:

$$[160 - \Delta/2, 160 + \Delta/2]$$

con lo que la probabilidad de que X tome algún valor del intervalo será pequeña, pero no nula. Si a continuación se levanta sobre el intervalo considerado un rectángulo de altura $h(160)$, tal que su área sea igual al valor de la probabilidad anterior, se tiene:

$$\text{Área} = h(160) \cdot \Delta = P(160 - \Delta/2 \leq X \leq 160 + \Delta/2) \ .$$

De ahí que la altura del rectángulo pueda asociarse a una densidad de probabilidad, por ser igual al cociente entre la probabilidad del intervalo y su tamaño.

Si se seleccionan ahora valores x_i de la v.a. X, distantes entre sí una distancia Δ y se determinan las alturas $h(x_i)$ de los infinitos intervalos así obtenidos se obtiene un histograma y uniendo los centros de las caras superiores de los rectángulos, el correspondiente polígono de frecuencias (figura 5.2).

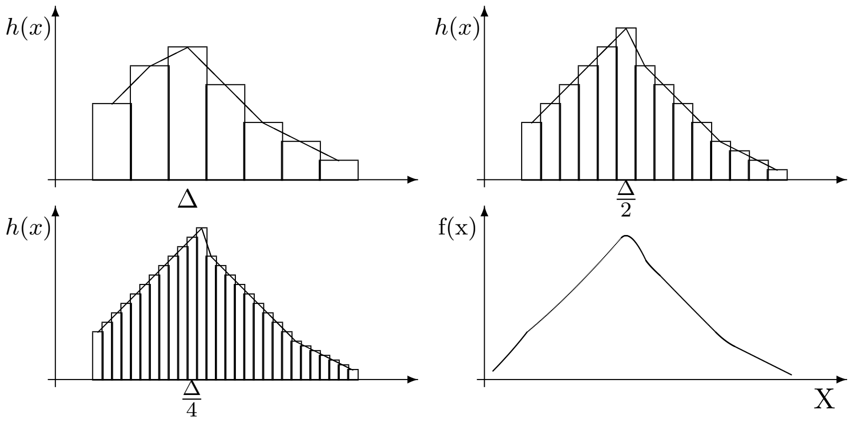

Figura 5.2: Obtención esquemática de la función de densidad.

La suma de las áreas de los rectángulos debe ser uno, por ser igual a la probabilidad de que X tome cualquier valor. Si se hace que la anchura de los rectángulos tienda a cero, el polígono de frecuencias se transforma en una curva (figura 5.2). Dicha curva es la representación gráfica de la función f, denominada *función de densidad* de la v.a. X, obtenida como límite de los valores h:

$$\lim_{\Delta \to 0} h(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{P(x - \Delta/2 \leq X \leq x + \Delta/2)}{\Delta} = f(x) \ .$$

Si se desea calcular la probabilidad de que la variable se encuentre entre dos valores dados, ésta es igual al área bajo la curva f entre a y b (figura 5.3). Es decir:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\, x \ .$$

Lógicamente se verifica que:

$$P(-\infty < X < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}\, x = 1 \ . \tag{5.1}$$

Obviamente f es no negativa. Cualquier función no negativa que verifique la condición dada en (5.1) será una función de densidad.

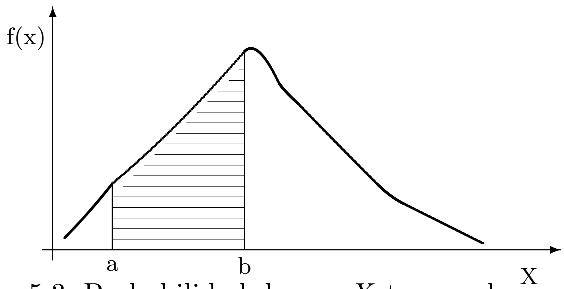

Figura 5.3: Probabilidad de que X tome valores entre a y b.

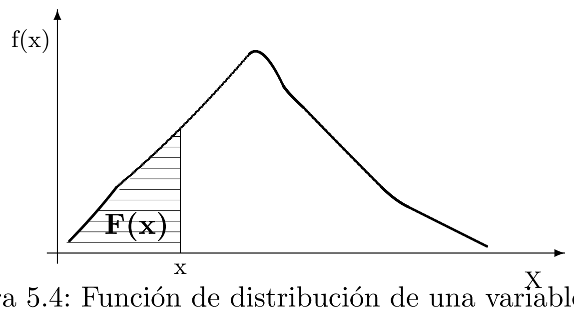

Figura 5.4: Función de distribución de una variable continua.

Al igual que en el caso discreto, la *Función de Distribución*, F, de una variable aleatoria X, se define como:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u) \, \mathrm{d}\, u \ .$$

La función de distribución en x da la probabilidad de que X tome valores menores o iguales a x, dicho valor es el área de la superficie rayada en la figura 5.4.

Las propiedades de la función de distribución en el caso continuo son idénticas a las del caso discreto con la única excepción de que ahora ésta no presenta discontinuidades de salto. Para ciertas variables continuas de uso frecuente, los valores de F se encuentran tabulados, lo cual facilita considerablemente el cálculo de probabilidades. Para terminar este epígrafe, se muestra la relación existente entre las funciones definidas:

$$P(a < X < b) = P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(b) - F(a)\ .$$

Ejemplo 5.4 *Si*

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ k & \text{si} \quad 2 \le x \le 3 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

1. *Para que f sea función de densidad debe verificar:*

   a) $f(x) \ge 0, \quad \forall x$

   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 1\ .$

   La primera propiedad se cumple siempre que $k \ge 0$. Se cuestiona para qué valor de k se verifica la segunda propiedad.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x &= \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}\,x + \int_2^3 k\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + kx|_2^3 \\ &= 1 - \frac{1}{2} + 3k - 2k\ . \end{aligned}$$

   Por tanto, para que f sea función de densidad, debe verificarse que $1 - \frac{1}{2} + 3k - 2k = 1$ o equivalentemente $k = \frac{1}{2}$.

2. *La función de distribución de la variable anterior es:*

   - *Si $x < 0$ entonces $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}\,x = 0$.*
   - *Si $0 \le x < 1$ entonces $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}\,x + \int_0^x (1-x)\,\mathrm{d}\,x = x - \frac{x^2}{2}$.*

- *Si* $1 \leq x < 2$ *entonces* $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \,\mathrm{d}\, x + \int_0^1 (1-x) \,\mathrm{d}\, x + \int_1^x 0 \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}$.
- *Si* $2 \leq x < 3$ *entonces* $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \,\mathrm{d}\, x + \int_0^1 (1-x) \,\mathrm{d}\, x + \int_1^2 0 \,\mathrm{d}\, x + \int_2^x \frac{1}{2} \,\mathrm{d}\, x = \frac{x-1}{2}$.
- *Si* $x \geq 3$ *entonces* $F(x) = 1$.

Resumiendo:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x - \frac{x^2}{2} & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{x-1}{2} & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 3 \ . \end{cases}$$

3.2. La función esperanza matemática

Si X es una v.a. discreta que toma los valores $x_1, x_2, \ldots$, con probabilidades $p_1, p_2, \ldots$, se define la *esperanza* de X como:

$$E[X] = \sum_{i \geq 1} x_i p_i \ .$$

Si g es una función de la v.a. X, se define la esperanza de $g(X)$ como:

$$E[g(X)] = \sum_{i \geq 1} g(x_i) p_i \ .$$

Ejemplo 5.5 *Para calcular el valor medio de la variable del ejemplo 5.1.*

$$E[X] = 0 \cdot 0'2601 + 1 \cdot 0'4998 + 2 \cdot 0'2401 = 0'98 \ .$$

La esperanza de la variable $Y = X^3$ *vale:*

$$E[Y] = 0^3 \cdot 0'2601 + 1^3 \cdot 0'4998 + 2^3 \cdot 0'2401 = 2'42 \ .$$

Si X es una v.a. continua con función de densidad f, se define la esperanza de X como:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}\,x \ ,$$

Si $g(X)$ es una función de la v.a. X, se define la esperanza de $g(X)$ como:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,\mathrm{d}\,x \ .$$

En los dos últimos casos la definición es válida sólo si existe la integral. A partir de ahora, y salvo que la situación así lo requiera, tan sólo se expresan los resultados para variables continuas.

Ejemplo 5.6 *Para la variable del ejemplo 5.4 la esperanza vale:*

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}\,x + \int_2^3 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^1 + \frac{x^2}{4}\bigg|_2^3 = \frac{17}{12} \ . \end{aligned}$$

Propiedad 5.1 *Si a es una constante cualquiera, se verifica:*

1. *$E[aX] = aE[X]$.*
2. *$E[a+X] = a + E[X]$.*

Ambas propiedades son fácilmente demostrables sin más que aplicar la definición de esperanza.

Ejemplo 5.7 *Continuando con el ejemplo 5.4:*

1. *Si se considera $Y = 12X$, entonces $E[Y] = 17$.*
2. *Si ahora $Y = \frac{7}{12} + X$, entonces $E[Y] = 2$.*

3.3. Caracterización parcial de variables aleatorias

A partir de la función esperanza se introducen una serie de funciones que ofrecen visiones parciales de la distribución en estudio. Si X es una v.a. se definen sus momentos de orden k respecto al origen y respecto a la media, respectivamente, como:

$$\alpha_k = E[X^k] \qquad \mu_k = E[(X - E[X])^k] \ .$$

- *La media y la varianza.* Especial importancia tienen el momento de orden 1 respecto al origen y el momento de orden 2 respecto a la media:

  $$\alpha_1 = E[X] = \mu \quad V[X] = \mu_2 = E[(X-\mu)^2] = \sigma^2 \ .$$

  El primero de ellos es la *media*, esperanza o valor esperado de X y el segundo es la *varianza* de X, coincidiendo su raíz cuadrada positiva con la desviación típica.

  Igual que en estadística descriptiva, se pueden expresar los momentos respecto a la media en función de los momentos respecto al origen. En particular la varianza puede expresarse como:

  $$V[X] = \mu_2 = \sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2.$$

  Ejemplo 5.8 *Dada la variable:*

X	0	1	2	3
$p(x)$	$0'2$	$0'2$	$0'3$	$0'3$

  Se sabe que $E[X] = 0'2 + 0'6 + 0'9 = 1'7$, *por tanto la varianza vale:*

  $$\begin{aligned} V[X] &= 0 \cdot 0'2 + 1 \cdot 0'2 + 4 \cdot 0'3 + 9 \cdot 0'3 \\ &\quad -1'7^2 = 1'21 \ . \end{aligned}$$

  Ejemplo 5.9 *Para una v.a. cuya función de distribución es:*

  $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ x - 1 & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 2 \ . \end{cases}$$

Su varianza viene dada por:

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Y puesto que:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_1^2 x^2 \,\mathrm{d}\,x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 \\ &= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \,. \\ E[X] &= \int_1^2 x \,\mathrm{d}\,x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 \\ &= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \,. \end{aligned}$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} V[X] &= \frac{7}{3} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \frac{7}{3} - \frac{9}{4} = \frac{28-27}{12} = \frac{1}{12} \,. \end{aligned}$$

Ejercicio 5.1 *Demuestre las siguientes propiedades de la varianza:*

a) $V[aX] = a^2 V[X]$
b) $V[a+X] = V[X]$.

En este punto es interesante analizar como quedan definidos algunos de los conceptos que se vieron en estadística descriptiva:

- *La moda.* Es el valor que más se repite, es decir, el de mayor probabilidad si la variable es discreta, o el de mayor densidad si es continua. En el primer caso la moda es el valor x_i, tal que p_i es mayor o igual que p_j para todo j distinto de i. Si la variable es continua, la moda coincide con el valor de X que maximiza la función de densidad, debiéndose utilizar los procedimientos analíticos de obtención de puntos óptimos. Como en el caso descriptivo, también aquí son válidas las nociones de modas múltiples y, por tanto, de modas relativas.

Ejemplo 5.10 *Para las distribuciones de los ejemplos 5.8 y 5.9 las modas obtenidas son:*

a) *Para la variable discreta existen dos modas, 2 y 3, pues la probabilidad, en ambos casos, es 0'3, mayor a la de cualquier otro valor.*

b) *En el caso continuo,* $f(x) = 1$ *en el intervalo* $[1, 2]$*, por tanto, la moda es todo el intervalo* $[1, 2]$.

- *La mediana.* Es el punto central de la distribución y coincide con el valor de x tal que $F(x) = 0'5$. En el caso de variable discreta la similitud es total con la definición dada en descriptiva.

  Ejemplo 5.11 *Siguiendo con los mismos ejemplos, para el caso discreto, trivialmente,* $Me = 2$. *Y para el caso continuo:*

  $$F(x) = \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow x - 1 = \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow Me = \tfrac{3}{2} \ .$$

- *Coeficientes de simetría y de curtosis.* Se definen respectivamente como:

  $$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}; \qquad \gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \ .$$

  Siendo la discusión sobre ambos coeficientes la misma que en el caso descriptivo.

- *Normalización o tipificación.* Se dice que una v.a. está tipificada o normalizada cuando su media vale cero y su desviación típica uno. Para tipificar una variable X se le resta su media y se divide por su desviación típica:

  $$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \ .$$

3.4. Función característica y generatriz de momentos

A partir de la esperanza matemática, se pueden definir dos funciones que caracterizan totalmente a la distribución de probabilidad. Estas funciones son la función característica y la función generatriz de momentos.

1. *Función característica.*

$$\varphi_X(t) = E[e^{iXt}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(x)\,\mathrm{d}\,x \ .$$

2. *Función generatriz de momentos.*

$$m_X(t) = E[e^{Xt}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} f(x)\,\mathrm{d}\,x \ .$$

Ejemplo 5.12 *Para la v.a. continua del ejemplo 5.9:*

- *La función característica es:*

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= E[e^{itx}] = \int_1^2 e^{itx}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left.\frac{e^{itx}}{it}\right|_1^2 = \frac{e^{2it}}{it} - \frac{e^{it}}{it} = \frac{e^{it}}{it}(e^{it}-1)\ .\end{aligned}$$

- *La función generatriz de momentos es:*

$$\begin{aligned}m_X(t) &= E[e^{tx}] = \int_1^2 e^{tx}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left.\frac{e^{tx}}{t}\right|_1^2 = \frac{e^{t}}{t}(e^{t}-1)\ .\end{aligned}$$

Esta última función además de caracterizar a la distribución, permite, como su propio nombre indica, obtener fácilmente cualquier momento. Así:

$$\alpha_k = \frac{d^k m_X(t)}{dt^k}\ |_{t=0}\ .$$

En sentido inverso, el conocimiento de los momentos permite obtener la función generatriz de momentos.

3.5. Cambio de variable

Sea X una v.a. con función de densidad f e $Y = h(X)$ una función de X estrictamente monótona. Entonces, la función de densidad de la nueva variable Y viene dada por:

$$g(y) = f(x)\left|\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}\right| .$$

Ejemplo 5.13 *Sea X una v.a. con función de densidad:*

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 0 & \text{en el resto .} \end{cases}$$

Dada $Y = \frac{X+3}{5}$, puesto que:

$$X = 5Y - 3 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} = 5 \ ,$$

la función de densidad de Y se obtiene como:

$$g(y) = \begin{cases} 50y - 40 & \text{si} \quad \frac{4}{5} < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto .} \end{cases}$$

3.6. Desigualdad de Tchebychev

Sea X es una v.a. y k una constante positiva, se verifica que:

$$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \ .$$

Esta expresión permite conocer la proporción mínima de valores de X que distan de la media, un máximo k veces la desviación típica. Para k igual a tres, por ejemplo, la desigualdad garantiza que al menos el 89 % de la distribución está en el intervalo $\mu \pm 3\sigma$.

Ejemplo 5.14 *Un fabricante de frigoríficos utiliza una máquina para introducir gas en dichos aparatos. La máquina no es perfecta y por tanto no introduce cantidades iguales en cada frigorífico, aunque se conoce que la* *cantidad media de gas que se introduce por aparato es igual a 15 litros y que la varianza es de 4 litros*^{2}.

Si se define por X *la variable aleatoria que mide la cantidad de gas introducido en un frigorífico, se tiene por la desigualdad de Tchebychev que*

$$P(X \in [15 - 2k, 15 + 2k]) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \ .$$

Por tanto, si se desea hallar un intervalo, centrado en la media, en el que se encuentre el contenido de gas de, al menos, un $90\,\%$ *de los frigoríficos fabricados por él, sólo hay que resolver la siguiente ecuación;*

$$0'9 = 1 - \tfrac{1}{k^2}.$$

Obteniéndose que $k = \sqrt{10}$ *o* $k = -\sqrt{10}$, *como* k *tiene que ser positivo se toma* $k = \sqrt{10}$. *Por tanto el intervalo requerido es* $[8'67, 21'32]$.

4. Variables multidimensionales

4.1. Distribuciones conjunta y marginales

En este epígrafe se extienden las nociones vistas para una variable unidimensional al caso de variables n-dimensionales. En particular se trata el estudio de variables bidimensionales, siendo generalizables los resultados obtenidos aquí a cualquier dimensión finita.

En un principio se distingue entre variables discretas y continuas, aunque más adelante sólo van a considerarse las continuas.

4.1.1. Variable discreta

Sea (X, Y) v.a. discreta con su correspondiente probabilidad para cada par de valores. Se define:

$$P(X = x, Y = y) = f(x, y).$$

La función f, denominada función de cuantía, verifica:

1. $f(x,y) \geq 0 \qquad \forall (x,y)$

2. $\sum_x \sum_y f(x,y) = 1$.

Si X toma los valores $x_1, \ldots, x_m$, e Y los valores $y_1, \ldots, y_n$, entonces se puede expresar la función de cuantía conjunta a través de la tabla:

X/Y	y_1	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_n	Marginal X
x_1	$f(x_1,y_1)$	$\ldots$	$f(x_1,y_j)$	$\ldots$	$f(x_1,y_n)$	$f_1(x_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	$f(x_i,y_1)$	$\ldots$	$f(x_i,y_j)$	$\ldots$	$f(x_i,y_n)$	$f_1(x_i)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	$f(x_m,y_1)$	$\ldots$	$f(x_m,y_j)$	$\ldots$	$f(x_m,y_n)$	$f_1(x_m)$
Marginal Y	$f_2(y_1)$	$\ldots$	$f_2(y_j)$	$\ldots$	$f_2(y_n)$	1

Donde en los márgenes derecho e inferior se han obtenido las distribuciones marginales de X e Y respectivamente. Así, la probabilidad de que X tome un valor genérico x_i es:

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j) = f_1(x_i) \ .$$

De igual forma se hace para Y. Siendo f_1 y f_2 las funciones de cuantía marginales de X e Y respectivamente. La función de distribución viene dada por:

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{u \leq x} \sum_{v \leq y} f(u,v) \ .$$

4.1.2. Variable continua

Sea (X, Y) una v.a. continua, se dice que f es su función de densidad conjunta si

$$P(X \leq x, Y \leq y) \quad = \quad \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}\,v\,\mathrm{d}\,u \ .$$

La función f debe verificar:

1. $f(x,y) \geq 0 \qquad \forall (x,y)$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,\mathrm{d}\,v\,\mathrm{d}\,u = 1$.

$z = f(x,y)$ representa una superficie de densidad, de tal forma que el área encerrada entre la superficie z y el plano XY vale la unidad.

La probabilidad de que la v.a. tome valores dentro del rectángulo $(a,b) \times (c,d)$ viene dada por:

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x.$$

Si A representa cualquier suceso y R_A la región del plano XY que se corresponde con A, se define su probabilidad como:

$$P(A) = \int_{R_A} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \ .$$

La función de distribución conjunta viene dada por:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= P(-\infty < X \leq x, -\infty < Y \leq y) \\ &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}\,v\,\mathrm{d}\,u \ . \end{aligned}$$

La relación entre F y f es:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x,y) \ .$$

Las funciones de distribución marginales son:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,\mathrm{d}\,v\,\mathrm{d}\,u \\ F_2(y) &= P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}\,v\,\mathrm{d}\,u\ . \end{aligned}$$

Derivando se obtienen las correspondientes funciones de densidad marginales:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)\,\mathrm{d}\,v \\ f_2(y) &= \frac{\partial F_2(y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)\,\mathrm{d}\,u\ . \end{aligned}$$

Ejemplo 5.15 *Sea (X,Y) una v.a. bidimensional cuya función de densidad conjunta es:*

$$f(x,y) = \begin{cases} k(\frac{xy}{2}+1) & \text{si} \quad 0 < x < 1,\ -1 < y < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Para calcular k, de tal forma que $f(x,y)$ sea función de densidad, se procede de la siguiente forma:

1. *$f(x,y) \geq 0$ si y sólo si $k \geq 0$.*
2. *Como $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = 1$*

   Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= k\int_0^1\int_{-1}^1 (\frac{xy}{2}+1)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x \\ &= k\int_0^1 \left(\frac{xy^2}{4}+y\right)\Big|_{-1}^{1}\mathrm{d}\,x = k2x|_0^1 = 2k\ . \end{aligned}$$

   Por lo tanto $k = \frac{1}{2}$ y la función de densidad conjunta viene dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy+2}{4} & \text{si} \quad 0 < x < 1,\ -1 < y < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Se calcula ahora la función de distribución:

$$\begin{aligned}
&F(x,y) = \\
&= \; P(X \leq x, Y \leq y) = \int_0^x \int_{-1}^y \frac{uv+2}{4} \, \mathrm{d}\, v \, \mathrm{d}\, u \\
&= \; \int_0^x \left(\frac{uv^2+4v}{8}\right)\Big|_{v=-1}^{y} \mathrm{d}\, u \\
&= \; \tfrac{u^2(y^2-1)}{16} + \tfrac{u(y+1)}{2}\Big|_{u=0}^{x} \\
&= \; \tfrac{x^2(y^2-1)}{16} + \tfrac{x(y+1)}{2} \; .
\end{aligned}$$

Para valores de (x,y) dentro del campo de definición.

Las funciones de distribución marginales quedan:

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v) \, \mathrm{d}\, v \, \mathrm{d}\, u \\
&= \int_0^x \int_{-1}^1 \frac{uv+2}{4} \, \mathrm{d}\, v \, \mathrm{d}\, u \\
&= \int_0^x \frac{uv^2+4v}{8}\Big|_{v=-1}^{1} \mathrm{d}\, u = u \,\Big|_{u=0}^{x} = x \; .
\end{aligned}$$

Para valores de X dentro de su campo de definición.

$$\begin{aligned}
F_2(y) &= P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{y} f(u,v) \, \mathrm{d}\, v \, \mathrm{d}\, u \\
&= \int_0^1 \int_{-1}^y \frac{uv+2}{4} \, \mathrm{d}\, v \, \mathrm{d}\, u \\
&= \int_0^1 \frac{uv^2+4v}{8}\Big|_{v=-1}^{y} \mathrm{d}\, u \\
&= \tfrac{u^2(y^2-1)}{16} + \tfrac{u(y+1)}{2}\Big|_{u=0}^{1} \\
&= \tfrac{y^2-1}{16} + \tfrac{y+1}{2} = \tfrac{y^2+8y+7}{16} \; .
\end{aligned}$$

Para valores de Y dentro de su campo de definición.

Resumiendo se tiene:

$$F(x,y) = $$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \text{ ó } y < -1 \\ \frac{x^2(y^2-1)+8x(y+1)}{16} & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \; -1 \leq y < 1 \\ F_1(x) & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \; y \geq 1 \\ F_2(y) & \text{si} \quad x \geq 1, \, -1 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1, \; y \geq 1 \; . \end{cases}$$

Por último, se pueden obtener las funciones de densidad marginales:

1. *A partir de la función de densidad conjunta:*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y \\ &= \int_{-1}^{1} (\frac{xy}{4} + \frac{1}{2})\,\mathrm{d}\,y = \left.\frac{xy^2+4y}{8}\right|_{-1}^{1} = 1 \; . \end{aligned}$$

   Para valores de X dentro de su campo de definición.

$$\begin{aligned} f_2(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \int_{0}^{1} (\frac{xy}{4} + \frac{1}{2})\,\mathrm{d}\,x = \left.\frac{x^2y+4x}{8}\right|_{0}^{1} = \frac{y+4}{8} \; . \end{aligned}$$

   Para valores de Y dentro de su campo de definición.

2. *O bien, derivando parcialmente las funciones de distribución marginales:*

$$\frac{\partial F_1(x)}{\partial x} = f_1(x), \qquad \frac{\partial F_2(y)}{\partial y} = f_2(y) \; .$$

4.2. Distribuciones condicionadas. Independencia

Este epígrafe se limita a analizar los resultados para una v.a. continua. Los correspondientes a v.a. discreta se obtienen de forma inmediata intercambiando los conceptos con sus homólogos. Se define la función de densidad condicionada de X para un valor dado de Y como:

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} \ ,$$

siempre que $f_2(y)$ sea distinto de cero. De la forma definida, el lector puede comprobar que efectivamente se trata de una función de densidad. Su correspondiente función de distribución tiene la forma

$$F(x/y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x}{f_2(y)} \ .$$

De igual manera se obtienen las condicionadas de Y con respecto a X.

De las relaciones siguientes (todas ellas inmediatas):

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(y/x)f_1(x) \\ f(x/y) &= \frac{f(y/x)}{f_2(y)}f_1(x) \\ f_2(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y/x)f_1(x)\,\mathrm{d}\,x \ , \end{aligned}$$

se puede deducir que:

$$f(x/y) = \frac{f(y/x)f_1(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(y/x)f_1(x)\,\mathrm{d}\,x} \ ,$$

que es la expresión del *Teorema de Bayes* para funciones de densidad.

Ejemplo 5.16 *Continuando con el ejemplo anterior se calcula* $f(x/y)$.

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{\frac{xy}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{y+4}{8}} = \frac{2xy+4}{y+4} \ .$$

Independencia. Se dice que las variables X e Y son independientes, si las distribuciones condicionadas coinciden con las marginales, es decir:

$$f(x/y) = f_1(x) \Longleftrightarrow f(y/x) = f_2(y) \ .$$

Igual que siempre la condición de independencia se establece en un doble sentido. El que las variables sean independientes implica que el conocimiento de que una variable toma un determinado valor o esté contenida en un rango de valores no da ninguna información sobre los valores de la otra variable.

De la definición de condicionada puede deducirse que dos variables X e Y son independientes si y sólo si:

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y) \ .$$

Esta definición de independencia se puede extender a cualquier conjunto finito de variables, y así, las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$, son independientes si se verifica:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n) \ .$$

La independencia conjunta implica la de cualquier subconjunto de variables; en contra de lo que pasaba en la relación entre sucesos, donde para que se diera la independencia conjunta era necesario exigir la independencia para cualquier combinación de sucesos.

Ejemplo 5.17 *Para comprobar si las variables X, Y del ejemplo 5.15 son independientes se puede utilizar*

- *la definición:*

$$\begin{aligned} f(x/y) &= \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{\dfrac{xy}{4} + \dfrac{1}{2}}{\dfrac{y+4}{8}} \\ &= \frac{2xy+4}{y+4} \neq f_1(x) = 1 \ . \end{aligned}$$

- *la caracterización:*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{xy+2}{4} \neq f_1(x)f_2(y) \\ &= 1 \cdot \frac{y+4}{8} = \frac{y+4}{8} \ . \end{aligned}$$

Por lo tanto X e Y no son independientes.

4.3. Esperanza. Covarianza y correlación

Sea $g(X,Y)$ una función de la v.a. (X,Y) de función de densidad f y función de distribución F. Se define la esperanza matemática de $g(X,Y)$ como:

$$\begin{aligned} E[g(X,Y)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\,\mathrm{d}\,F(x,y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \ , \end{aligned}$$

siempre que dicha integral exista. Especial importancia tienen los casos en que g toma las formas:

- $g(X,Y) = X^hY^k$ donde la esperanza recibe el nombre de *momento de orden (h,k) respecto al origen*. Se denota α_{hk}.
- $g(X,Y) = (X-\alpha_{10})^h(Y-\alpha_{01})^k$ en cuyo caso se tiene el *momento de orden (h,k) respecto a la media* y que se identifica por μ_{hk}.

Ejercicio 5.2 *Compruebe que:*

a) $\alpha_{10} = E[X]; \quad \alpha_{01} = E[Y]$
b) $\mu_{10} = \mu_{01} = 0$
c) $\mu_{20} = \sigma_X^2; \quad \mu_{02} = \sigma_Y^2.$

Además $\mu_{11} = \sigma_{XY}$ es la covarianza de (X,Y), definiéndose el coeficiente de correlación lineal como:

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} \ .$$

La definición de esperanza se puede generalizar al caso de un número finito de variables, siendo su expresión:

$$E[g(X_1, X_2, \ldots, X_n)] =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}\, x_1 \, \mathrm{d}\, x_2 \ldots \mathrm{d}\, x_n.$$

Como siempre, si existe dicha integral.

Propiedad 5.2

1. $E[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[X_n]$.
2. *Si las variables* $X_1 \ldots X_n$ *son independientes, entonces:*
$$E[X_1 X_2 \ldots X_n] = E[X_1]E[X_2] \ldots E[X_n] \ .$$
3. *Si dos variables son independientes, su covarianza es nula. El recíproco no es cierto en general.*
4. *Si* $Z = aX + b$ *y* $T = cY + d$*, se tiene que* $\sigma_{Z,T} = ac\sigma_{XY}$.
5. $|\rho_{XY}| \leq 1$.
6. *Si* $Y = aX + b$ *entonces* $|\rho_{XY}| = 1$*, siendo su signo igual al de* a.
7. *Si* $Z = X \pm Y$*, entonces* $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \pm 2\sigma_{XY}$.

Se llama *vector de medias* de la v.a. $X = (X_1, X_2, \ldots X_n)$ al vector cuyas componentes son las esperanzas de cada una de las X_i, que se representan por $\bar{\mu} = E[X]$.

Se llama *matriz de varianzas y covarianzas* de la v.a. X a la matriz cuadrada de orden n dada por:

$$\Sigma_X = E[(X - \bar{\mu})^t (X - \bar{\mu})].$$

Dicha matriz contiene en la diagonal a las varianzas de las variables y en el resto a las covarianzas entre ellas. La matriz de varianzas y covarianzas es, por tanto, simétrica y además semidefinida positiva; y es definida positiva, si ninguna de las variables es combinación lineal del resto.

Ejemplo 5.18 *Las medias α_{10} y α_{01} (momentos de orden 1 respecto del origen) de la variable aleatoria bidimensional del ejemplo 5.15 se obtienen como:*

$$\begin{aligned}
\alpha_{10} &= E[X] = \tfrac{1}{2}\int_0^1\int_{-1}^1 \left(\tfrac{x^2y}{2}+x\right)\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^1 \left(\tfrac{x^2y^2}{4}+xy\right)\Big|_{-1}^1 \mathrm{d}\,x \\
&= \tfrac{1}{2}x\Big|_0^1 = \tfrac{1}{2} \\
\alpha_{01} &= E[Y] = \tfrac{1}{2}\int_0^1\int_{-1}^1 \left(\tfrac{xy^2}{2}+y\right)\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^1 \left(\tfrac{xy^3}{6}+\tfrac{y^2}{2}\right)\Big|_{-1}^1 \mathrm{d}\,x \\
&= \tfrac{1}{2}\tfrac{x^2}{6}\Big|_0^1 = \tfrac{1}{12}\ .
\end{aligned}$$

De la misma forma los momentos de orden 2 vienen dados por:

$$\alpha_{20} = E[X^2] = \tfrac{1}{3} \qquad \alpha_{02} = E[Y^2] = \tfrac{1}{3}.$$

De donde:

$$\begin{aligned}
\mu_{20} &= E[(X-\alpha_{10})^2] = \alpha_{20} - \alpha_{10}^2 \\
&= \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{12} \\
\mu_{02} &= E[(Y-\alpha_{01})^2] = \alpha_{02} - \alpha_{01}^2 \\
&= \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{144} = \tfrac{47}{144}\ .
\end{aligned}$$

Para calcular la covarianza se necesita previamente:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11} = \\
&= E[XY] = \tfrac{1}{2}\int_0^1\int_{-1}^1 \left(\frac{x^2y^2}{2}+xy\right)\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{x^2y^3}{6}+\frac{xy^2}{2}\right]_{-1}^1 \mathrm{d}\,x = \frac{1}{6}\,\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{18}\ .
\end{aligned}$$

Y por tanto:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \sigma_{x,y} = \mu_{11} = E[XY] - E[X]E[Y] \\
&= \tfrac{1}{18} - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{72}\ .
\end{aligned}$$

De donde el coeficiente de correlación es:

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\frac{1}{72}}{\sqrt{\frac{1}{12}}\sqrt{\frac{47}{144}}} = 0'0842 \ .$$

4.4. Cambio de variables

Sea (X, Y) una v.a. con función de densidad f. Sean $Z = g_1(X, Y)$ y $T = g_2(X, Y)$ transformaciones continuas y biunívocas definidas por dos funciones g_1 y g_2 que admiten derivadas parciales continuas. Entonces la función de densidad de la nueva variable (Z, T) existe en todos aquellos puntos donde el determinante

$$J = \frac{\partial(z,t)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix}$$

sea distinto de cero. Siendo dicha función igual a:

$$g(z,t) = f(h_1(z,t), h_2(z,t))|J_1| \ .$$

Donde h_1 y h_2 son las funciones inversas de g_1 y g_2, y $J_1 = \frac{\partial(x,y)}{\partial(z,t)}$.

Es inmediata la generalización al caso de n variables.

Ejemplo 5.19 *En el ejemplo 5.15 se considera la transformación:*

$$\left.\begin{array}{l} Z = X - Y \\ T = X + 2Y \end{array}\right\}$$

Para obtener la función de densidad de la nueva variable (Z, T) se calcula en primer lugar:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0 \ .$$

Por lo tanto la función de densidad $g(z, t)$ existe para cualquier punto. A continuación se despeja (X, Y) en función de (Z, T) y se calcula J_1.

$$\left.\begin{array}{l} X = \frac{2Z+T}{3} \\ Y = \frac{T-Z}{3} \end{array}\right\} \longrightarrow J_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \ .$$

Por tanto:

$$g(z,t) = \frac{\frac{2z+t}{3}\frac{t-z}{3}}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{(2z+t)(t-z)}{108},$$

resultando:

$$g(z,t) = \begin{cases} \dfrac{(2z+t)(t-z)}{108} & \begin{matrix} 0 < 2z+t < 3, \ y \\ -3 < t-z < 3 \end{matrix} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

5. Ejercicios

5.1. Ejercicio resuelto

5.1 La función de distribución asociada a la producción de una máquina, en miles de unidades, es del tipo:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x(2-x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq k \\ 1 & \text{si} \quad x > k. \end{cases}$$

a) Determine k para que F sea función de distribución.

b) Calcule la función de densidad de la variable producción.

c) Obtenga media, moda, mediana y varianza de la producción.

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la producción sea inferior a 500 unidades? ¿Y la de que sea superior a 250 unidades?

e) Si el beneficio de la máquina viene dado, en función de la producción, por $B = 6X - 3$, calcule la función de densidad y de distribución del beneficio.

Solución:

a) Para calcular k hay que utilizar las propiedades que se conocen de la función de distribución. Se sabe que la función de distribución cuando se trata de una v. a. continua es continua en todo $\mathbb{R}$. Por tanto:

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \to k^+} F(x) = \lim_{x \to k^-} F(x) \\ &= \lim_{x \to k^-} x(2-x) = k(2-k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad k^2 - 2k + 1 = 0 \\ &\Rightarrow \quad k = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1. \end{aligned}$$

En consecuencia $k = 1$.

b) Para calcular la función de densidad a través de la función de distribución basta con derivar F:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

c) Por definición se tiene que:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \,\mathrm{d}\, x \\ &= \int_0^1 x(2-2x) \,\mathrm{d}\, x \\ &= \left(x^2 - \frac{2x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\ . \end{aligned}$$

Para calcular la moda hay que ver el valor que hace máxima la función de densidad. Derivando se obtiene, $f'(x) = -2$. La derivada de la función de densidad es negativa, por lo que se trata de una función decreciente y toma el valor máximo en el extremo inferior del intervalo $[0, 1]$. La moda es por tanto $x = 0$.

La mediana de una distribución es aquel valor que deja el 50 % de la distribución a la derecha y el otro 50 % a la izquierda. Expresado en términos de la función de distribución el valor mediana, Me, verifica, $F(Me) = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} 2Me - Me^2 = \frac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad 4Me - 2Me^2 = 1 \\ 2Me^2 - 4Me + 1 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad Me = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}\ . \end{aligned}$$

De las dos soluciones se rechaza aquella que es mayor que uno, pues para ese valor la función de distribución vale 1. Por lo tanto:

$$Me = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

La varianza se puede calcular como:

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 \ .$$

Se sabe que $E[X] = \frac{1}{3}$, entonces lo único que hay que calcular es $E[X^2]$:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \int_0^1 2x^2(1-x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{6} \ . \end{aligned}$$

Y por tanto:

$$V[X] = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18} \ .$$

d)

$$\begin{aligned} P(X < 0'5) &= \int_{-\infty}^{0'5} f(x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \int_0^{0'5} (2-2x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left(2x - x^2\right)\Big|_0^{0'5} = 0'75 \ . \end{aligned}$$

De la misma forma se obtiene $P(X > 0'25)$, sabiendo que:

$$\begin{aligned} P(X > a) &= 1 - P(X \leq a) \\ P(X > 0'25) &= 1 - P(X \leq 0'25) = 1 - \int_0^{0'25} (2-2x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= 1 - \left(2x - x^2\right)\Big|_0^{0'25} = 0'5625 \ . \end{aligned}$$

e) Para calcular la función de densidad de $B = 6X - 3$, se aplica la fórmula del cambio de variable:

$$\begin{aligned} g(b) &= f(x)\left|\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,b}\right| \\ b &= 6x - 3 \Longrightarrow x = \frac{b+3}{6} \\ g(b) &= \left(2 - 2\left(\frac{b+3}{6}\right)\right)\frac{1}{6} = \frac{3-b}{18} \ . \end{aligned}$$

Se calcula el dominio de definición de esta nueva función de densidad.

Si $b = 6x - 3$ y $0 \leq x \leq 1 \Longrightarrow -3 \leq b \leq 3$, entonces

$$g(b) = \begin{cases} \frac{3-b}{18} & \text{si } -3 \leq b \leq 3 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

La función de distribución viene dada por:

$$\begin{aligned} F(b) &= \int_{-\infty}^{b} g(x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \int_{-3}^{b} \frac{3-x}{18}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left(\frac{x}{6} - \frac{x^2}{36})\right)\Big|_{-3}^{b} = \frac{6b - b^2 + 27}{36} \end{aligned}$$

cuando $b \in (-3, 3)$, por lo que:

$$F(b) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad b < -3 \\ \frac{6b-b^2+27}{36} & \text{si} \quad -3 \leq b \leq 3 \\ 1 & \text{si} \quad b > 3\ . \end{cases}$$

5.2. Ejercicios propuestos

5.1. Una v.a. tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ kx & \text{si} \quad 2 < x < 4 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

a) Encuentre k para que f sea función de densidad.
b) Calcule la función de distribución.
c) Obtenga la media, moda y mediana de la variable X.

5.2. Una v.a. toma los valores $-2, -1, 0, 1, 2$. Se sabe que cada valor tiene la misma probabilidad que su opuesto, que $P(X = 0) = 0'2$ y que la probabilidad del valor 1 es el doble que la del 2.

Calcule:

a) La función de cuantía y la función de distribución.
b) $P(-1 \leq X \leq 1)$, $P(-1 \leq X < 1)$, $P(X \geq 2)$.
c) La función de cuantía de la variable $Y = 2X^2$.
d) El valor esperado de la variable Y^2.

5.3. Debido al aniversario de un centro comercial se regala por cada 30€ de compra una llave para abrir un cofre de los 50 que hay. Entre ellos hay 2 que contienen premio, uno de 600€. y otro de 400€. ¿Cuál es la ganancia esperada para una persona que tiene dos llaves?

5.4. Observando una determinada v.a. de un experimento se obtiene que su función de densidad viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + x & \text{si} \quad 0 < x \leq a \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

a) Encuentre a para que f sea función de densidad.
b) Obtenga su función de distribución.
c) Calcule su media, moda y mediana.
d) Calcule $P(X \leq 3)$, $P(0 \leq X \leq 0'5)$, $P(X \leq -0'5)$
e) En un experimento posterior se comprobó que una nueva variable venía dada en función de ésta por: $Y = \operatorname{Ln} X$. Calcule su función de densidad.

5.5. ¿Existe algún valor de k para el cual la función:

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x) & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases}$$

sea función de densidad? En caso afirmativo calcule su función de distribución.

5.6. El tiempo de vida, en meses, de determinados insectos viene dado por una v.a. cuya función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ K(1 - e^{-2x}) & \text{si} \quad x \geq 0\ . \end{cases}$$

Calcule:

a) El valor de K para que F sea función de distribución.
b) Su función de densidad.
c) La probabilidad de que un insecto viva más de dos meses.
d) La probabilidad de que un insecto que ha vivido 4 meses viva un mes más.

5.7. Sea X una v.a. continua cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ kx & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

a) Encuentre k para que f sea función de densidad.
b) Calcule la función de distribución.
c) Calcule $P(0 \leq X \leq 1'25)$ y $P(X \geq -1)$.
d) Calcule el valor medio de la variable y su varianza.
e) Si $Y = 2X^2 - 2$, calcule el valor medio de Y.

5.8. Se posee una moneda trucada de tal forma que la probabilidad de sacar cara es el triple que la de sacar cruz. Se lanza esta moneda tres veces y se cuenta el número de veces que ha salido cara.

Calcule:

a) La función de cuantía y la función de distribución de la variable definida.
b) El valor esperado y la varianza.
c) La probabilidad de que el número de caras sea mayor o igual a dos.

5.9. La longitud de ciertos caracoles marinos, en centímetros, se distribuye según la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k(x-3)(7-x) & \text{si} \quad x \in (3,7) \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

a) Determine k para que f sea función de densidad.

b) Calcule su función de distribución.

c) Para un estudio interesan aquellos caracoles marinos cuya longitud esté comprendida entre 3'5 y 6 centímetros ¿Qué porcentaje de caracoles hay para ese estudio?

5.10. De una v.a. discreta se sabe que los valores que toma son: -3, -2, 0, 2, 3, que $P(X=0)=0'5$, $P(X=3)=0'125$, que el valor esperado de la variable es 0 y la varianza 3'25.

Calcule la función de cuantía de $Y = X^2$.

5.11. Se sabe que la función de distribución de una variable aleatoria es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0'15 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0'6 & \text{si} \quad 1 \leq x < a \\ 0'75 & \text{si} \quad 2'5 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad 3 \leq x \ . \end{cases}$$

Calcule:

a) La función de cuantía.

b) La esperanza, la mediana y la moda de la variable aleatoria.

c) $P(-1'5 \leq X < 3'5)$.

5.12. Se considera la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{si } x = 1,\ 2,\ 3. \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

a) Calcule k para que f sea función de cuantía de una variable aleatoria X.

b) Calcule la función de distribución de X.
c) Calcule media, moda, mediana y varianza.
d) $P(0'5 \leq X < 2'5)$.
e) Sea $Y = \text{Ln}(X+1)$, calcule la función de cuantía de Y.

5.13. Se considera un experimento aleatorio con un dado y con una moneda, de forma que se lanza el dado y a continuación la moneda. Si la moneda sale cara, el resultado del experimento es la puntuación obtenida al lanzar el dado y si sale cruz el resultado es la puntuación del dado más uno. Calcule la función de cuantía de este experimento.

5.14. Se lanza cuatro veces una moneda y se cuenta el número de caras que se han obtenido. Calcule la función de cuantía de este experimento.

5.15. Se lanza una moneda hasta la primera vez que sale cara. Calcule la función de cuantía de este experimento.

5.16. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{si } x = 1, 2, \ldots, N \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

a) Pruebe que la función f es una función de cuantía de una variable aleatoria X.
b) Calcule su función de distribución.
c) Obtenga la media y la varianza.

5.17. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} ke^{2x-1} & \text{si } x = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

a) Calcule k para que sea función de cuantía.
b) Calcule la función de distribución correspondiente.

5.18. Sea f definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 0'25 \\ ke^{2x} & \text{si} \quad 0'75 \leq x < 1 \\ \frac{\text{Ln}(x)}{2} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

a) Calcule k para que sea función de densidad.
b) Calcule la función de distribución correspondiente.
c) Calcule la mediana de la distribución.
d) Sea $Y = 2X + 1$, calcule $E[Y]$.

5.19. Sea f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ k(3x^2 + 4x) & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ \dfrac{2}{21}x & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

a) Calcule k para que f sea función de densidad.
b) Calcule su función de distribución.
c) Sea $Y = \text{Ln}(2X)$, calcule la función de densidad de Y.

5.20. Sea f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si} \quad 0 \leq x < a \\ x - 1 & \text{si} \quad a \leq x \leq 2 \ . \end{cases}$$

Calcule a para que f sea función de densidad.

5.21. Sea F la función definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x - \frac{x^2}{2} & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ k(\frac{x^2}{2} - x + 1) & \text{si} \quad 1 \leq x \leq a \\ 1 & \text{si} \quad x > a \ . \end{cases}$$

a) Calcule a y k para que F sea la función de distribución de X.

b) Calcule la función de densidad de X.
c) Calcule la mediana de la distribución.
d) Calcule la distribución de $Y = e^X$.

5.22. Sea F una función de distribución dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ kx^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ k(4x - x^2 - 2) & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ b & \text{si} \quad x \geq 2\ . \end{cases}$$

a) Calcule k y b para que F sea función de distribución de una variable aleatoria continua.
b) Calcule $E[X]$ y $V[X]$.
c) Obtenga $P(\frac{3}{4} < X < \frac{3}{2})$.

5.23. Se considera (X, Y) la v.a. bidimensional con

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x - y) & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

a) Determine k para que f sea función de densidad.
b) Calcule su función de distribución.
c) Obtenga las distribuciones marginales y condicionadas.
d) Calcule $P(X \leq 3, Y \geq 0'5)$, $F(2, 0)$ y $F(1, 0'25)$.

5.24. Sea f la función definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Demuestre que es una función de densidad.

5.25. De las siguientes funciones, calcule el valor de k para que sean funciones de densidad de una variable aleatoria bidimensional.
a)

$$f(x, y) = \begin{cases} kx^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1,\ y \leq x \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

b)

$$f(x,y)=\begin{cases} k(2x+y) & \text{si } 0\le x\le 1,\ y\le x^2 \\ 0 & \text{en el resto.}\end{cases}$$

c)

$$f(x,y)=\begin{cases} k & \text{si } 0\le x\le 1,\ |y|\le x^2 \\ 0 & \text{en el resto.}\end{cases}$$

d)

$$f(x,y)=\begin{cases} k(x^2+y^2) & \text{si } 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{en el resto.}\end{cases}$$

5.26. Sea

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy & \text{si } 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{en el resto.}\end{cases}$$

Calcule

a) El valor de k para que la función f sea función de densidad.

b) La función de distribución correspondiente.

c) Las distribuciones marginales.

d) $P(0'5\le X\le 0'75, 0\le Y\le 0'25)$.

e) La distribución de $X+Y$.

5.27. Sea

$$f(x,y)=\begin{cases} k & \text{si } \ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2 \\ 0 & \text{en el resto.}\end{cases}$$

a) Calcule k para que f sea función de densidad.

b) Obtenga la función de densidad de la variable bidimensional (U,V), donde $U=X+Y$ y $V=X-Y$.

c) Calcule las marginales de (X,Y).

d) Determine las condicionadas de (U,V).