

Desarrollo teórico

Javier Ángel Fernández
Fernando Chacón Gómez
José Antonio Torné Zambrano

Planificación de proyectos. Curso 2017-2018.

Realizaremos, en primer lugar, una breve introducción para entender mejor el problema a abordar. A continuación definiremos una serie de palabras claves:

1. Un proyecto es un conjunto de tareas o actividades realizadas a lo largo del tiempo con el objetivo de crear un producto o servicio único.
2. La Formulación y selección es la etapa en la cual, los gestores definen el proyecto y su alcance y valoran su impacto en el marco del plan estratégico de la empresa. En base a ello, deciden si desarrollarlo o no.
3. La Planificación es la etapa en la que, si el proyecto ha sido seleccionado para ser desarrollado, los gestores realizarán una programación detallada. Definirán las tareas o actividades de las que consta, estudiarán las relaciones entre las tareas, estimarán los recursos necesarios para desarrollarlas y las duraciones de las tareas en base a los recursos que se les destinarán, estimarán también los costes y la duración del proyecto.
4. Control es la fase en la que los gestores auditarán el desarrollo del proyecto para que pueda ser terminado en el tiempo y coste previsto.
5. Implantación y entrega es la fase en la que el proyecto se implanta y se entrega a los usuarios.

El primer paso será descomponer el proyecto en un conjunto de actividades, entendiendo por actividad la ejecución de una tarea que exige para su realización la consumición de una determinada cantidad de recursos.

Por otro lado, definiremos el concepto de suceso. Un suceso es una acción que no utiliza recursos y que indica el principio o el final de una o varias actividades.

Visto esto es natural usar grafos para representar los proyectos, donde usaremos los arcos para representar las actividades y donde los nodos designarán los sucesos.

Para el planteamiento del problema tengamos en cuenta las siguientes indicaciones:

Cada actividad se corresponde con un arco (i, j) donde i representa el suceso inicial y j es el suceso final.

El grafo debe tener un único suceso inicio del proyecto y un único suceso fin del proyecto.

Las precedencias a la realización de la actividad también han de representarse en el grafo.

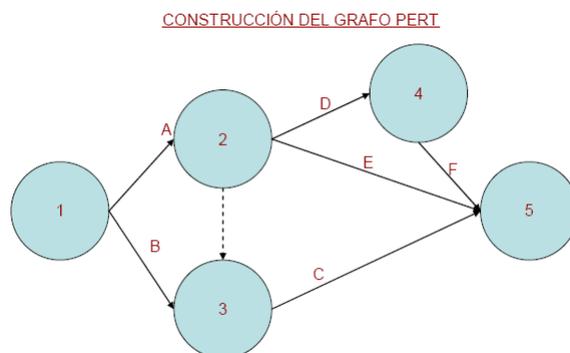
A veces será necesario construir una actividad ficticia para indicar las precedencias.

Una vez que hemos construido el grafo correspondiente al proyecto debemos indicarle una duración a cada una de las actividades.

En primer lugar, formalizamos el problema.

Formalización del Problema

Vamos a formular el problema como un problema de programación lineal. Hay muchas formas de formular el problema de planificación de proyectos, en nuestro caso vamos a formularlo teniendo en cuentas los tiempos de cada actividad y minimizando el tiempo del proyecto. Para describir las variables sigamos el siguiente dibujo :



En el dibujo, los vértices con números representa el instante donde empieza una o más actividades. Los arcos representan las actividades. Por ejemplo la actividad A empieza en el instante 1. Llamamos t_i al instante donde comienzan las actividades cuyos arcos comienzan en i. Si tenemos n vértices entonces el problema:

$$\min t_n - t_1$$

sujeto a

$$t_j - t_i \geq d_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n$$

$$t_i, t_j \in \mathbb{Z}^+, i, j = 1, \dots, n$$

siendo d_{ij} la duración de la actividad que está en el arco (i,j). La diferencia $t_n - t_1$ simboliza la duración del proyecto, $t_j - t_i$ representa el tiempo disponible para hacer la actividad del arco (i,j). Las actividades que hagan las restricciones activas se diran que son actividades críticas y el resto tendrán un tiempo de holgura (la resta de los dos miembros de la desigualdad).

Nuestro objetivo será ver que actividades son críticas y cuáles no y decidir el orden en el que se realizan las actividades.

Definiremos a continuación una serie de términos:

- Una actividad se denomina crítica cuando no hay holgura al determinar sus instantes de inicio y fin, esto es, cuando cualquier retraso en la finalización de la actividad supone un retraso en el final del proyecto.
- Una actividad es no crítica si tiene holgura, es decir, si la realización de la actividad puede ser adelantada o retrasada dentro de unos límites sin afectar a la duración total del proyecto.
- Llamaremos camino crítico a un camino en el grafo desde el inicio hasta el fin formado por actividades críticas.
- La holgura total de una actividad (i, j) , denotada por TF_{ij} , es la cantidad que se puede retrasar el inicio de la actividad (i, j) más allá de su instante más temprano sin retrasar el proyecto. Su valor viene dado por $TF_{ij} = T_j - t_i - d_{ij}$.
- La holgura libre de la actividad (i, j) , denotada por FF_{ij} , es la cantidad en que se puede retrasar el inicio de la actividad (i, j) más allá de su instante más temprano sin afectar al inicio de cualquier actividad posterior. Su valor viene dado por $FF_{ij} = t_j - t_i - d_{ij}$.

Método CPM (duración de las actividades conocidas)

El método del camino crítico lo aplicamos cuando la duración de las actividades es conocida o se ha estimado con exactitud. Este método consta de dos pasos que describimos a continuación:

Fase hacia delante (determinación de instantes más tempranos):

En esta primera pasada (hacia delante) se determinan los instantes más tempranos en que pueden comenzar las actividades y termina determinando la duración total del proyecto.

1. Se etiqueta el nodo inicial con tiempo 0, $t_1 = 0$.
2. Se elige un nodo k tal que todos los nodos anteriores unidos directamente a él por un arco ya hayan sido etiquetados: p, q, \dots, x . Etiquetamos el nodo k con el máximo del valor de estos nodos más la duración de la actividad cuyo arco está unido directamente al nodo k , esto es, $t_k = \max\{t_p + d_{pk}, t_q + d_{qk}, \dots, t_x + d_{xk}\}$.
3. Repetimos el proceso hasta etiquetar el último nodo n . La duración mínima del proyecto será t_n .

Fase hacia atrás (determinación de instantes más tardíos):

En la segunda pasada (hacia atrás) se calculan los instantes más tardíos en que pueden acabar las actividades. Una vez obtenidos estos valores es fácil determinar cuáles son las actividades críticas.

1. Etiquetamos el nodo final con el tiempo mínimo del proyecto obtenido en la fase anterior, es decir, $T_n = t_n$.

2. Se elige un nodo k tal que todos los nodos posteriores unidos directamente a él por un arco ya hayan sido etiquetados (p, q, \dots, x) . Etiquetamos el nodo k con el mínimo de las etiquetas/ valores de estos nodos menos la duración de la actividad cuyo arco está unido directamente al nodo k , esto es, $t_k = \min\{T_p - d_{kp}, T_q - d_{kq}, \dots, T_x - d_{kx}\}$.
3. Repetimos el proceso del paso 2 hasta etiquetar el nodo inicial (que debe ser etiquetado con $T_0 = 0$).

Una vez que hemos calculado los instantes tempranos y tardíos identificamos las actividades críticas. Una actividad (i, j) será crítica si no hay holgura, esto es, $T_i = t_i$, $T_j = t_j$ y $T_j - T_i = t_j - t_i = d_{ij}$. Las actividades críticas formarán un camino desde el principio hasta el final.

Si alguna actividad (i, j) verifica que $FF_{ij} = TF_{ij}$, entonces la actividad puede ser programada en cualquier instante del intervalo de tiempo $[t_i, T_j]$.

Método PERT (duración de las actividades aleatorias)

El objetivo del método es dar una distribución de la duración total del proyecto y, de esta forma, identificar la duración esperada y su varianza. Consideremos:

- La duración de cada actividad será una variable aleatoria D_{ij} con esperanza $E[D_{ij}]$ y varianza $V[D_{ij}]$.
- La duración total del proyecto será una variable aleatoria CP con esperanza $E[CP]$ y varianza $V[CP]$.

El método asume las siguientes hipótesis:

1. Las duraciones de las actividades son variables aleatorias independientes.

Teniendo esto en cuenta, si c es un camino en el grafo:

$$E[c] = \sum_{(i,j) \in c} E[D_{ij}].$$

$$V[c] = \sum_{(i,j) \in c} V[D_{ij}].$$

Como la duración total de un proyecto viene dada como la duración de un camino crítico cc , esto es, $CP = \sum_{(i,j) \in cc} D_{ij}$:

$$E[CP] = \sum_{(i,j) \in cc} E[D_{ij}].$$

$$V[CP] = \sum_{(i,j) \in cc} V[D_{ij}].$$

2. El camino crítico no cambia, siempre es el de mayor duración esperada. Si hay más de un camino con longitud esperada igual, se elige como camino crítico el que tenga mayor varianza. Por tanto, para determinar la duración esperada de un proyecto es suficiente con aplicar el método CPM utilizando las duraciones esperadas de las actividades. Una vez determinado el camino crítico la esperanza de la duración es la suma de las esperanzas de las duraciones de las actividades que lo forman y la varianza se haría de forma análoga.

3. La variable duración del proyecto, CP , sigue una distribución normal.

De las tres hipótesis se deduce que la distribución de CP es

$$N\left(\mu = \sum_{(i,j) \in cc} E[D_{ij}], \sigma^2 = \sum_{(i,j) \in cc} V[D_{ij}]\right).$$

Teniendo esto en cuenta, los pasos del método PERT son:

1. Determinar la esperanza y la varianza de todas las actividades del proyecto.
2. Encontrar el camino crítico utilizando las duraciones esperadas de las actividades (en caso de haber más de uno, se elige el de mayor varianza).
3. Obtener la varianza del camino crítico sumando las varianzas de las actividades que formen el camino.

Problemas alternativos

■ Coste en el método del camino crítico: alternativas en el desarrollo de una actividad.

Es muy habitual que la duración de una actividad no esté prefijada de antemano al existir diversas alternativas con distintos costes, dependiendo de los recursos asignados.

Podemos resolverlo mediante la programación matemática:

Consideremos I el conjunto de las actividades, P el conjunto de las actividades precedentes, $B_i + A_i d_i$ es la función de coste (lineal) dentro de un intervalo $[\underline{D}_i, \overline{D}_i]$, T es la duración total del proyecto, d_i es la duración de las actividades y x_i es el instante más temprano en que puede empezar la actividad.

Nuestro objetivo será obtener una planificación de mínimo coste cumpliendo las precedencias establecidas y sin superar el tiempo máximo del proyecto.

$$\min \sum_{i \in I} (B_i + A_i d_i)$$

s.a.

$$x_i + d_i \leq x_j, \forall (i, j) \in P$$

$$\underline{D}_i \leq d_i \leq \overline{D}_i, \forall i \in I$$

$$x_i + d_i \leq T, \forall i \in I$$

$$x_i, d_i \geq 0, \forall i \in I$$

Si consideramos T un parámetro el problema se resuelve mediante la programación lineal paramétrica.

■ Programación de proyectos con recursos limitados: nivelación y asignación de recursos.

- Nivelación de recursos. Este problema se plantea cuando los recursos son utilizados de forma desigual en el tiempo. El objetivo es nivelar o repartir el uso de estos recursos en el tiempo de la forma más equilibrada posible sin alargar la duración del proyecto, es decir, la duración dada por el camino crítico. Una forma de resolverlo es empleando el algoritmo Burgess-Killebrew.
- Asignación de recursos limitados. Este problema se distingue del anterior fundamentalmente porque aquí hay un límite o disponibilidad de los recursos en cada periodo de tiempo, de modo que no se pueden programar tareas en un periodo de tiempo de forma que la suma de las cantidades del recurso que necesitan esas actividades sea mayor que la disponibilidad del recurso. Una forma de resolverlo es empleando el algoritmo Wiest-Levy.