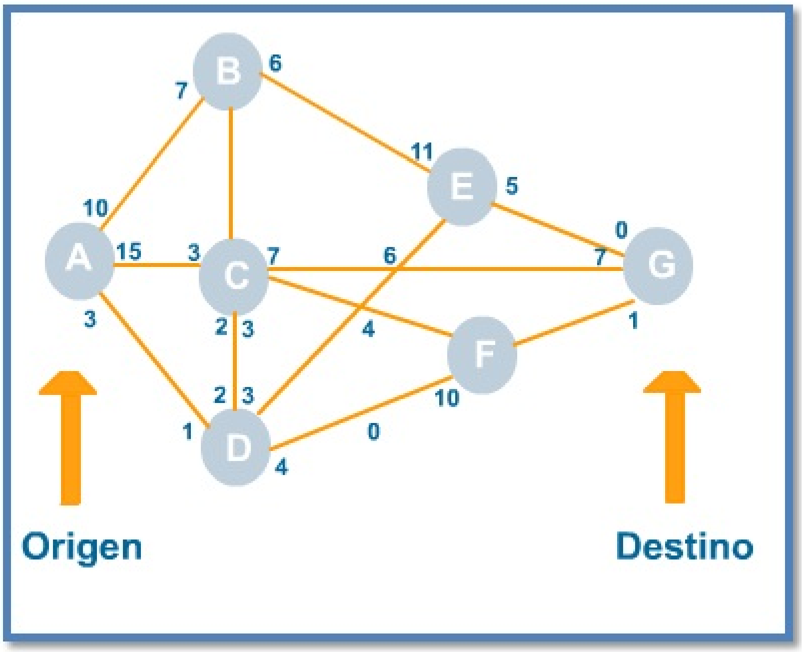
INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN. PROBLEMAS DE MÁXIMO FLUJO



Trabajo realizado por Ballester Matito, Manuel
Molina De Castro, María Elena
Moreno López, Manuel.

1. Introducción

El Problema del Flujo Máximo, es un problema de redes muy importante en la investigación de operaciones y en la industria. El problema corresponde con la siguiente situación:

Supongamos que tenemos un conjunto de nodos, que pueden representar, por ejemplo, ciudades. Además, hay ciertas aristas que unen esos nodos, las cuales pueden ser pensadas como las carreteras que unen dichas ciudades. Sobre estas vamos a imponer una cantidad máxima de flujo (que podría ser el límite de vehículos que pueden pasar por dicha carretera en un periodo de tiempo). Debemos responder a la pregunta....¿Cuál es la máxima cantidad de dicho flujo (o vehículos) que podemos circular desde una determinada ciudad (o nodo origen) hasta otra distinta (el nodo de destino)?

Este caso modela gran cantidad de problemas reales. Por ejemplo, otro problema equivalente sería determinar cuál es el máximo flujo de aguas residuales que podemos enviar desde una casa hasta una depuradora, Y además, podremos conocer por qué tuberías debería pasar ese flujo.

1.1. Definiciones básicas

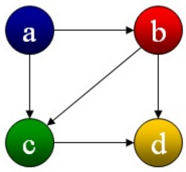
Introduciremos las nociones básicas de la teoría de grafos que son necesarias para el trabajo:

- Un **arco o arista:** corresponde a una relación entre dos vértices de un grafo.

  Para caracterizar un grafo G son suficientes únicamente el conjunto de todas sus aristas, comúnmente denotado con la letra E (del término en inglés edge), junto con el conjunto de sus vértices, denotado por V. Así, dicho grafo se puede representar como $G(V, E)$.

- Un **vértice o nodo** es la unidad fundamental de la que están formados los grafos. Un grafo no dirigido está formado por un conjunto de vértices y un conjunto de aristas (pares no ordenados de vértices), mientras que un grafo dirigido está compuesto por un conjunto de vértices y un conjunto de arcos (pares ordenados de vértices).

En el siguiente ejemplo, el conjunto de nodos sería V y el conjunto de arista E



V={a, b, c, d}

E={(a,c), (a,b), (b,c), (b,d), (c,d)}

Por otro lado, vamos a analizar la terminología que estaremos usando continuamente a lo largo del desarrollo teórico:

- **Red:** Consiste en un conjunto de puntos y un conjunto de líneas que unen ciertos pares de puntos. Los puntos se llaman nodos (o vértices). Las líneas se llaman arcos (o ligaduras, aristas o ramas).

  Los arcos se etiquetan para dar nombres a los nodos en sus puntos terminales, por ejemplo, AB es el arco entre lo nodos A Y B.

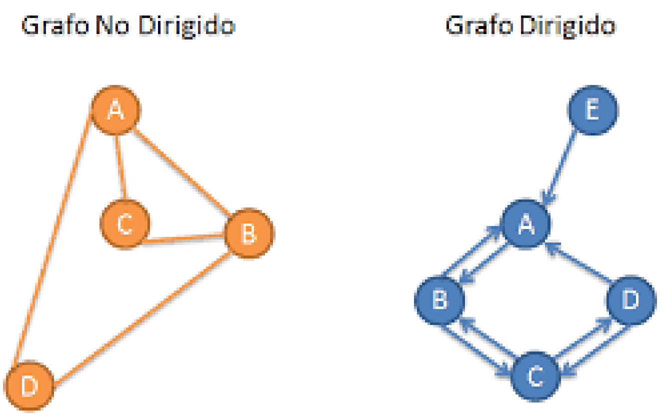
  En un problema de programación lineal, las redes pueden representar un conjunto de estaciones, campos petrolíferos, almacenes, fabricas, sucursales, ciudades, interconectadas entre si a través de caminos, conductos, tuberías que permiten fluir productos para la comercialización o la distribución.

- **Arcos dirigidos:** Se dice que un arco es dirigido cuando el arco tiene flujo en una dirección (como en una calle de un sentido). La dirección se indica agregando una cabeza de flecha al final de la línea que representa el arco.

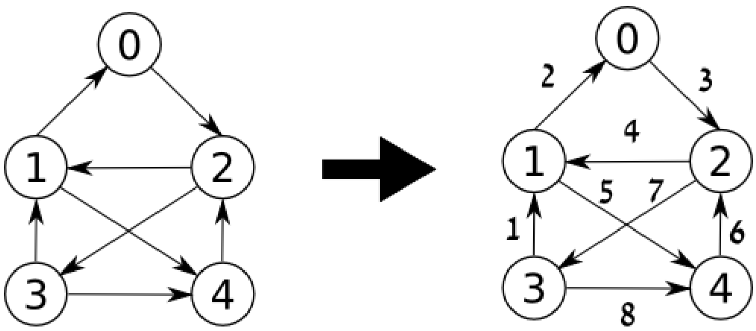
  Al etiquetar un arco dirigido con el nombre de los nodos que une, siempre se coloca primero al nodo de donde viene y después el nodo a donde va, esto es, un arco dirigido del nodo A al nodo B debe etiquetarse como AB y no como BA. Otra Manera es AB.

- **Arcos no dirigidos:** Si el flujo a través de un arco se permite en ambas direcciones (como una tubería que se puede usar para bombear fluido en ambas direcciones), se dice que es un arco no dirigido.

Veamos un ejemplo de esto que acabamos de contar:



Cabe destacar que en los modelos de redes, normalmente cada arco o arista va a tener una capacidad máxima que limitará la capacidad de esa red, y/o otra indicación indicando el coste de esa arista (que puede representar, por ejemplo, la longitud de ese arco). Esas cantidades se expresan sobre las aristas o arcos, tal y como se presenta en la figura de abajo:



(*) Aunque ésta es la terminología formal, en lo que sigue, entenderemos por arcos a los arcos dirigidos, y por arista, a los no dirigidos.

1.2. Modelos de optimizacion de redes

Los principales modelos de redes se pueden agrupar, en términos generales, en los siguientes cuatro modelos:

- Modelo de minimización de redes (Problema del árbol de mínima expansión).
- Modelo de la ruta más corta.
- Modelo del flujo máximo.
- Modelo del flujo del costo mínimo.

Vamos a hacer una breve explicación heurística de cada uno de ellos, ya que será explicado y formulados precisamente en el desarrollo teórico del presente trabajo:

- **Problema de flujo a coste mínimo:** El método del costo mínimo o método de los mínimos costos consiste en buscar la forma de distribuir flujo por una red de modo de hacerlo al menor costo posible. Pretendemos resolver problemas de transporte o distribución, por ejemplo, un transportista que desee ahorrar lo máximo posible en su viaje.

- **Problema de la ruta más corta:** Considere una red conexa y no dirigida con dos nodos especiales llamados origen y destino. A cada arista sele asocia una distancia no negativa. El objetivo es encontrar la ruta más corta (i.e. la trayectoria con la mínima distancia total) del origen al destino. Un ejemplo puede ser encontrar la ruta de un repartidor desde la oficina central hasta dónde deba entregar el paquete.

- **Problema de Flujo Máximo:** Se trata de enlazar un nodo fuente y un nodo destino a través de una red dirigida de arcos. Cada arco tiene una capacidad máxima de flujo admisible. El objetivo es obtener la máxima capacidad de flujo que podemos enviar entre la fuente y el destino. Profundizaremos en el trabajo sobre este problema.

- **El modelo de minimización de redes:** El modelo de minimización de redes o problema del árbol de mínima expansión tiene que ver con la determinación de los ramales que pueden unir todos los nodos de una red, tal que minimice la suma de las longitudes de los ramales escogidos. No se deben incluir ciclos en la solución del problema.

- Hay muchos problemas más (incluyendo los de transporte, asignación y transbordo), pero que no entraremos en detalles.

1.3. El problema de flujo máximo

Profundizaremos un poco más en este problema concreto de redes, y ahora veremos ciertos supuestos de los que se parten en este tipo de modelos.

Por un lado, consideraremos que tenemos de un grafo dirigido $G = (V, A)$, en el cual hay un vértice origen y otro destino. El resto diremos que son nodos de transbordo). Denotaremos por $e = (a, b)$ el arco que pasa del nodo a hacia el b. Nótese que al ser un grafo dirigido, esto es distinto del arco $h = (b, a)$.

Por otro lado, una importante condición que se ha de cumplir es que, cada uno de los vértice de transbordo, debe verificar la Ley de Corriente de Kirchoff, la cual nos dice que la cantidad de flujo que le llega al nodo debe ser igual a la que sale de él.

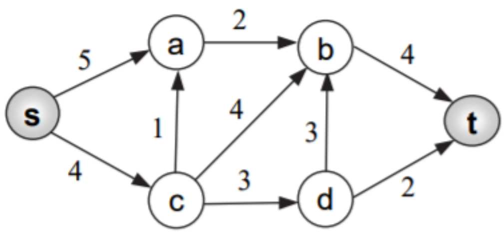
Por último, como ya hemos mencionado, el objetivo del problema es buscar una ruta que lleve el máximo flujo posible desde el origen hasta el destino, teniendo en cuenta que por cada arista (a, b) solo puede pasar una cantidad máxima de flujo $c(a, b)$. No obstante, vamos a evitar entrar en más detalles de la formulación del problema,ya que será todo esto visto en el apartado teórico.

A continuación mencionaremos algunos tipos de aplicaciones y ejemplos comunes del problema del flujo máximo:

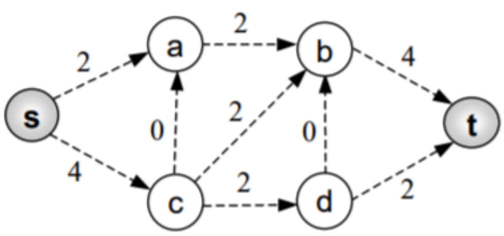
- Maximizar el flujo a través de la red de distribución de una compañía desde sus fábricas hasta sus clientes.
- Maximizar el flujo de petróleo por un sistema de tuberías.
- Maximizar el flujo de agua a través de un sistema de acueductos.
- Maximizar el flujo de vehículos por un área de transportes.

Ahora nos vamos a centrar en el problema de maximizar la cantidad total de corriente eléctrica que llevamos desde un central (s) hasta otra (t), pasando por otros puntos de transbordo intermedio.

Partimos del siguiente grafo



En la parte teórica explicareos como formular esto como un Prolema de Programación Lineal. Una vez esté modelado, pasaremos a la resolución. Hay dos alternativas: Si vamos a resolverlo computacionalmente, conviene usar el método símplex usual; pero si queremos resolverlo a mano, conviene más usar una simplificación del método símplex para este caso en concreto (se conoce como el algoritmo de cortes mínimos). Finalmente, podremos dar una solución como esta:



En cada arco vemos la cantidad de flujo que debemos enviar. Además, el lector puede observar fácilmente que, a excepción de los nodos origen o fuente (s), y destino (t), el resto cumplen la Ley de Kirchoff (como debe ocurrir en todos los nodos de transbordo).

2. Motivación

El problema de flujo máximo, aparece de forma recurrente en diversos campos y sigue atrayendo interés en el mundo de la investigación.

La gran cantidad de aplicaciones que tienen estos modelos nos han llamado la atención, y nos ha motivado a escoger este tema. Entre las aplicaciones más usuales que nos encontramos son: en las áreas de logística de las empresas (transporte de mercancías); en el flujo de gases y líquidos por redes de tuberías interconectadas; en el flujo de corrientes de intensidad en redes eléctricas con distintas capacidades y en el tráfico ferroviario; por citar algunas.

No obstante, probablemente el problema más típico es el de hallar cuál es el mayor flujo de corriente que se puede transmitir por una red eléctrica.